Teória hromadnej obsluhy

RNDr. Mária Vojteková, PhD.

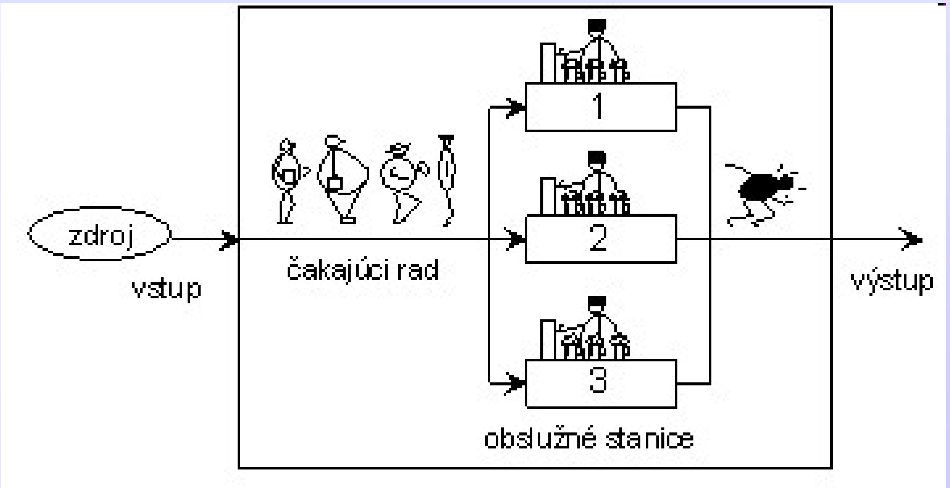
Literatúra

- Peško, Smieško: Stochastické modely operačnej analýzy, ŽU 1999
- Linda, Fronc: Operačná analýza V., Alfa, Bratislava 1986
- Volek, Froncová, Mravíková, Stankovianska: Operačná analýza II. , NADAS, Praha 1990
- Kluvánek, Brandalík: Operační analýza I., Alfa, Bratislava 1981
- Unčovský: Stochastické modely operačnej analýzy, Alfa, Bratislava 1980.

Matematické modely:
- deterministické (funkčná závislosť)
- stochastické (modely pracujúce s náhodným výberom).

Teória hromadnej obsluhy (THO) je matematická disciplína, ktorá analyzuje a rieši procesy, v ktorých toky požiadaviek prechádzajú určitými zariadeniami, od ktorých vyžadujú obsluhu.

Systémom hromadnej obsluhy sa rozumie všetko, čo je medzi príchodom požiadavky do systému a jej odchodom zo systému.



Priekopníkom THO bol dánsky inžinier Agner K. Erlang, ktorý pracoval v kodanskej telefónnej ústredni a potreboval vymyslieť postup, ako v jednom okamžiku umožniť hovor čo najväčšiemu počtu účastníkov.
Na začiatku 20. storočia odvodil unikátne vzorce pre pravdepodobnosti stavov stabilizovaného Markovovho systému so stratami.

Ďalšími významnými osobnosťami, ktoré prispeli k rozvoju teórie hromadnej obsluhy boli A.J. Chinčin, A.N. Kolmogorov, D.G. Kendall, C. Palm a ďalší.

Systémy hromadnej obsluhy majú veľké uplatnenie v rôznych odvetviach:

- navrhovanie železničných staníc, koľajísk, prekladísk a ich prevádzky
- riadenie systémov križovatiek ciest a obslužných zariadení,
- určovanie kapacity letísk a navrhovanie pristávacích plôch,
- dimenzovanie obslužných kapacít pôšt
- navrhovanie zariadení prístavov a dokov
- navrhovanie počítačových sietí
- telekomunikácie, ...

Náhodné procesy

Definícia: Náhodným procesom budeme nazývať systém náhodných premenných

$$\left\{X(\omega,t): \omega \in \Omega, t \in T\right\}$$

Ω- množina elementárnych udalostí,

T- množina nezáporných reálnych čísel (najčastejšie čas).

Skrátený zápis:

$$\left\{X(t)\right\}_{t\in T} \text{ alebo } \left\{X_t\right\}_{t\in T}$$

Náhodné procesy:

- s diskrétnym časom, ak $T = \{t_1, t_2, \ldots\}$ je spočítateľná,

- so spojitým časom, ak $T = \langle 0, \infty) = R^+_0$.

Množinu všetkých hodnôt, ktoré nadobúda náhodný proces, budeme označovať S a nazývať množina stavov.

Ak je množina S spočítateľná, náhodný proces nazveme náhodným reťazcom.

Markovove reťazce

Definícia: Náhodný reťazec $\{X(t)\}_{t\in T}$ sa nazýva Markovov reťazec s diskrétnym časom, ak:

А. А. Марков (1886).

1. $S = \{0, 1, 2, ... \}$
2. $T = \{0, 1, 2, ... \}$
3. platí Markovova nerovnosť

$$\forall i_0, i_{1,}, ..., i_{n-1}, i, j \in S$$

$$P\left(X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\right) = P\left(X_{n+1} = j / X_n = i\right)$$

tj. pravdepodobnosť, že nastane určitý jav, závisí len od predchádzajúceho javu a nezávisí od minulých javov (bez pamäte).

Definícia: Markovov reťazec $\{X(\mathrm{t})\}_{t\in \mathrm{T}}$ nazveme homogénny (v čase), ak:

$$\forall i, j \in S \quad \text{a} \quad k \in N$$

$$P\left(X_{n+k+1} = j / X_{n+k} = i\right) = P\left(X_{n+1} = j / X_n = i\right)$$

t.j. prechod medzi dvomi stavmi nezávisí od toho, v ktorom časovom okamžiku prechod skúmame (čas nemá vplyv). V tomto prípade sa prechody zo stavu *i* do stavu *j* označujú:

$$p_{ij} = P\left(X_{n+1} = j / X_n = i\right)$$

Maticu P=(p_{ij}) nazývame matica pravdepodobností prechodov.

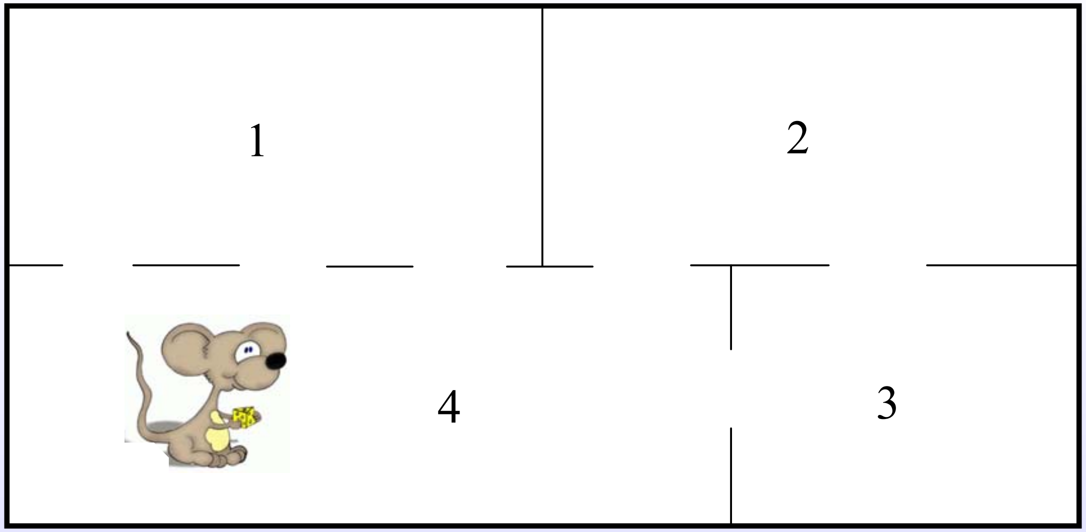
Veta: Matica pravdepodobností prechodov má nasledujúce vlastnosti:

1. pre každé $i, j \in S$ $\quad p_{ij} \geq 0$
2. pre každé $i \in S$ $\quad \sum_j p_{ij} = 1$

   t.j. súčet pravdepodobností v riadku je 1.

Každá matica s vlastnosťami 1. a 2. sa nazýva stochastická**.**

Príklad 1 (Myška v bludisku)



Myška sa vždy po rovnakom časovom intervale presunie do inej miestnosti. Myška je čiperka, neobstojí v miestnosti. Prechody sú volené s rovnakou pravdepodobnosťou. Na začiatku je myška v štvrtej miestnosti.

a) Modelujte správanie myšky náhodným procesom.

b) Zostavte maticu pravdepodobností prechodov.

Nech náhodná premenná $X(\omega,t)$ znamená prítomnosť myšky v miestnosti ω v čase t.

Množina stavov $S=\{1,2,3,4\}$.

p_{ij} je pravdepodobnosť prechodu z miestnosti i do miestnosti j $(i, j \in S)$.

Definícia: Pravdepodobnosť, že Markovov reťazec $\{X_n\}$ sa v čase *n* nachádza v *j*- tom stave

$$p_j(n) = P(X_n = j)$$

nazveme pravdepodobnosť stavu *j* v čase *n* .

Vektor $\vec{p}(n) = (p_0(n), p_1(n), \ldots, p_k(n))$

nazveme pravdepodobnostné rozdelenie reťazca v čase *n*.

Počiatočným rozdelením nazývame vektor $\vec{p}(0)$.

Lemma: Pre homogénny Markovov reťazec určený počiatočným rozdelením $\vec{p}(0)$ a maticou P platí:

$$\boxed{\vec{p}(n+1) = \vec{p}(n).P}$$

Pravdepodobnosti prechodov vyšších rádov označíme:

$$p_{ij}(k) = P\left(X_{k+n} = j \,/\, X_n = i\right)$$

Maticu pravdepodobností prechodov vyšších rádov označíme

$$P(k) = \left(p_{ij}(k)\right)_{i,j\in S} \qquad \text{pre k>0}$$

$$P(0) = \left(\delta_{ij}\right)_{i,j\in S} \qquad \text{(jednotková matica)}$$

Lemma: $P(n) = P^n$

Lemma: Pre ľubovoľné počiatočné rozdelenie pravdepodobností $\vec{p}(0)$ a pre $n \in T$ platí:

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0) \cdot P(n)$$

t.j.

$$\boxed{\vec{p}(n) = \vec{p}(0) \cdot P^n}$$

Veta: (Chapman – Kolmogorove rovnice)

$$P(n+m) = P(n) \cdot P(m)$$

Príklad 1 (pokračovanie)

Nájdite rozdelenie pravdepodobností po jednom časovom intervale.

Nájdite rozdelenie pravdepodobností po dvoch časových intervaloch.

Rozdelenie pravdepodobností v čase $t = 0$: $\vec{p}(0) = (0,0,0,1)$

Matica pravdepodobností prechodov:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad 2

Vieme, že úspešný výrobok bude v nasledujúcej sezóne opäť úspešný s pravdepodobnosťou p = 0,9. Neúspešný výrobok bude v nasledujúcej sezóne úspešný s pravdepodobnosťou p = 0,3. Produkcia podniku začala len s úspešnými výrobkami. Aká bude produkcia podniku po 3 rokoch?

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}(0) = (1{,}0)$$

$$\vec{p}(3) = (0{,}804;\ 0{,}196)$$

Grafová reprezentácia

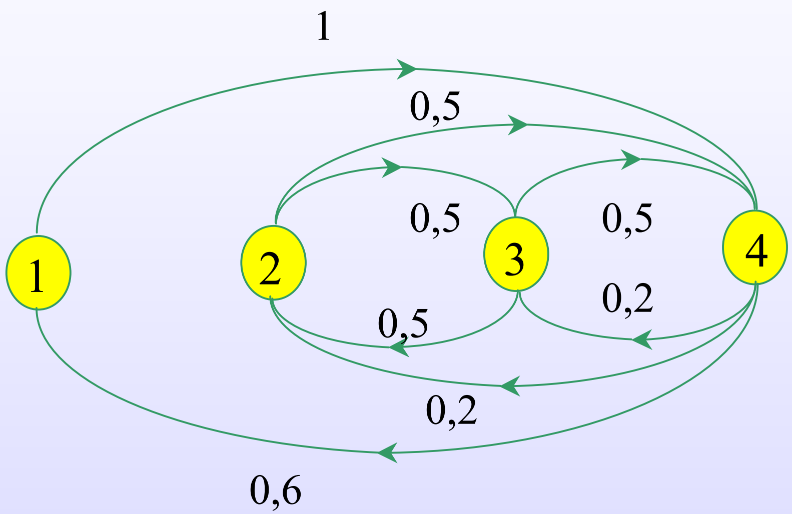
Definícia: Nech P je matica pravdepodobností prechodov Markovovho reťazca s diskrétnym časom a množinou stavov S. Potom prechodovým grafom reťazca budeme nazývať hranovoohodnotený digraf $G = (E, V, o)$, kde:

$$V = S$$

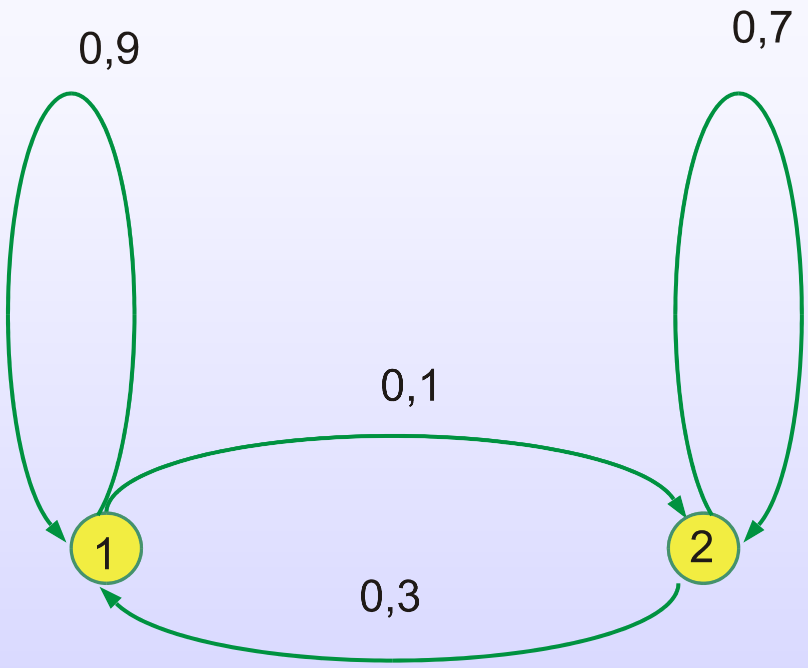
$$E = \{(i, j) \in V \times V : p_{ij} > 0\}$$

$$o(i, j) = p_{ij} \quad o : E \to \langle 0,1 \rangle$$

Graf k príkladu 1



Graf k príkladu 2



Definícia: Nech P je matica pravdepodobností prechodov.
Potom vektor $\vec{\pi} = \left(\pi_j\right)_{j\in S}$, pre ktorý platí:

1. $\pi_j \geq 0, \quad j \in S$
2. $\sum \pi_j = 1$
3. $\vec{\pi} = \vec{\pi} \cdot P$

nazývame stacionárnym rozdelením reťazca určeného maticou P.

Význam: Ak sa systém stabilizuje, je rozdelenie pravdepodobností stavov nezávislé na čase.

Veta: Nech P je matica pravdepodobností prechodov. Ak

$$\exists \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j \quad i, j \in S,$$

potom existuje aj

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \pi_j, \quad j \in S.$$

Úloha: K príkladom 1, 2 nájdite stacionárne rozdelenie pravdepodobností.

Príklad 1

$$\vec{\pi}.P = \vec{\pi}$$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \qquad \sum_{i=1}^{4} \pi_i = 1$$

$$\boxed{\vec{\pi} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{12}\right)}$$

Príklad 2

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \qquad \pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\boxed{\vec{\pi} = (0{,}75;\ 0{,}25)}$$

Definícia: Markovov reťazec, pre ktorý existuje *práve jedno* stacionárne rozdelenie reťazca, nazývame regulárny alebo ergodický.
V opačnom prípade nazývame reťazec neergodický.

Príklad 3

Vypočítajte stacionárne rozdelenie reťazca, ak je daná matica pravdepodobností prechodov:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veta: (Markovova) Ak existuje prirodzené číslo n také, že všetky prvky matice P^n sú kladné, potom Markovov reťazec s maticou pravdepodobností prechodu P je ergodický.

Klasifikácia stavov Markovovho reťazca

Definícia: Stav j je dosiahnuteľný zo stavu i, ak existuje $n \in T$ také, že $p_{ij}(n) > 0$. Ak je stav j dosiahnuteľný zo stavu i a stav i je dosiahnuteľný zo stavu j, hovoríme, že stavy i a j sú navzájom dosiahnuteľné.

Definícia: $C \subset S$ sa nazýva uzavretá, ak

$$\forall j \notin C, \forall i \in C \quad \text{a} \quad \forall n \in T : p_{ij}(n) = 0$$

Ak C je jednoprvková množina $C=\{\ i\ \}$, tak stav i nazývame absorbujúci.

Veta: Množina $C \subset S$ je uzavretá $\Leftrightarrow$ ak $\forall j \notin C$ a $\forall i \in C$ platí $p_{ij} = 0$.

Definícia: Markovov reťazec sa nazýva nerozložiteľný, ak v množine stavov neexistuje neprázdna vlastná uzavretá podmnožina.
V opačnom prípade sa nazýva rozložiteľný.

Veta: Nech i je ľubovoľný stav Markovovho reťazca. Množina C_i všetkých stavov dosiahnuteľných z i, teda

$$C_i = \{ j \in S : \exists n \in T,\ p_{ij}(n) > 0 \}$$

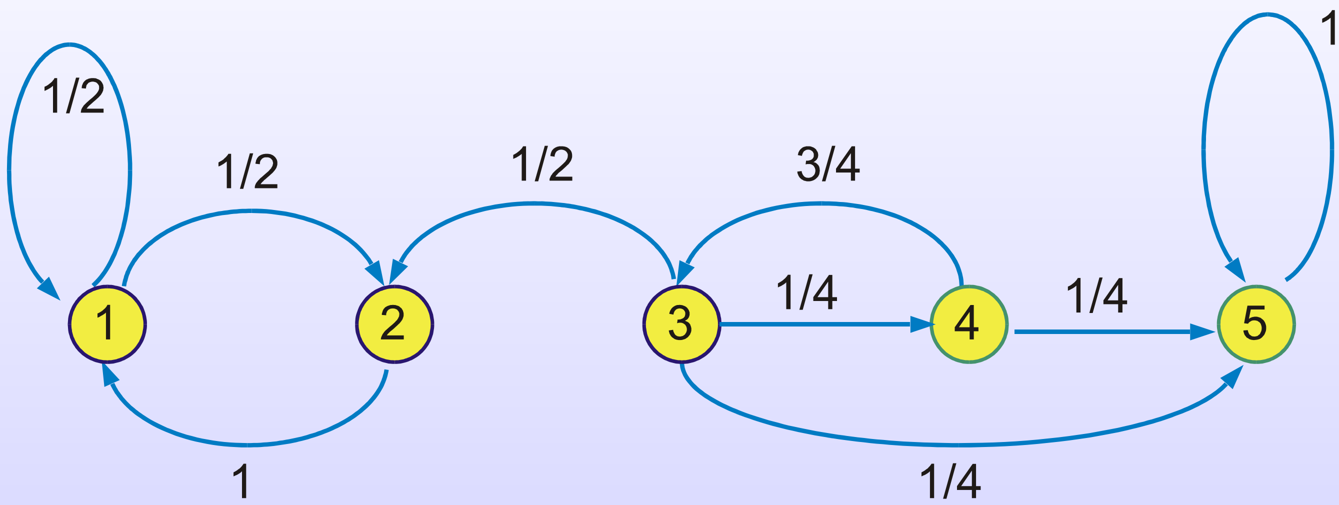
je množina uzavretá.

Príklad 4

Nech množina stavov je $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nájdite všetky uzavreté podmnožiny množiny stavov, ak je daná matica pravdepodobností prechodov:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Graf k príkladu 4



Veta: Markovov reťazec je nerozložiteľný práve vtedy, keď všetky stavy sú navzájom dosiahnuteľné.

Definícia: Stav j má periódu $d > 1$, ak:

1. pre každé n, ktoré nie je násobok d, platí: $p_{jj}(n) = 0$

2. d je najmenšie číslo s vlastnosťou (1).

$f_{ij}(n)$ pre $i \neq j$ nazveme pravdepodobnosť prvého prechodu zo stavu i do stavu j po n krokoch.

f_{jj} (n) nazveme pravdepodobnosť prvého návratu do stavu j po n krokoch. Teda

$$f_{ij}(n) = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, X_{n-2} \neq j, \ldots X_1 \neq j / X_0 = i)$$

$$f_{ij}(0) = 0$$

Nech $\boxed{f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)}$, potom

f_{ij} je pravdepodobnosť prvého prechodu zo stavu i do stavu j.

f_{jj} je pravdepodobnosť prvého návratu do stavu j.

Ak $f_{ij} > 0$, tak stav j je dosiahnuteľný zo stavu i.

Ak $f_{ij} = 1$, tak $f_{ij}(n)$ predstavuje rozdelenie pravdepodobnosti prvých prechodov a má význam počítať strednú dobu prechodov medzi stavmi ***i*** a ***j***

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ij}(n).$$

Definícia: Nech $j \in S$. *Ak* $f_{jj} = 1$, potom stav j nazveme trvalý stav. Ak $f_{jj} < 1$, tak stav j nazveme prechodný stav.

Ak $f_{jj} = 1$, potom stredná doba návratu do stavu ***j***

$$\mu_{j} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{jj}(n).$$

Definícia: Nech $j \in S$ je trvalý stav a μ_j je stredná doba návratu do stavu j. Ak $\mu_j < \infty$, stav j nazveme kladný, ak $\mu_j = \infty$, stav j nazveme nulový**.**

Ak $\mu_j < \infty$, tak pravdepodobnosť tohto stavu v stacionárnom rozdelení pravdepodobností sa rovná

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$$

Ak $\mu_j = \infty$, tak $\pi_j = 0$.

Príklad 4 (pokračovanie).

Ďakujem za pozornosť.