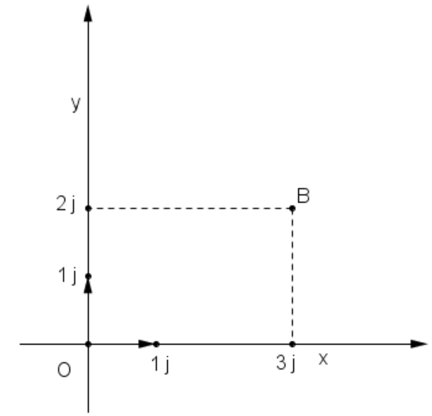
Súradnicové sústavy

a zobrazenia

Súradnicové sústavy v rovine (E_2)



1. Karteziánska súradnicová sústava

- najpoužívanejšia súradnicová sústava;
- určená začiatkom *O*, kolmými osami *x, y* a rovnakými jednotkami na osiach;
- je bijektívne zobrazenie, ktoré každému bodu $B \in E_2$ priradí usporiadanú dvojicu reálnych čísel $[x, y]$.

2. Pravouhlá súradnicová sústava

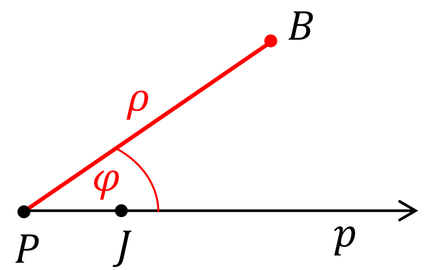
Od karteziánskej sa líši iba tým, že jednotky na osiach môžu byť rôzne.

3. Kosouhlá súradnicová sústava

- súradnicové osi nie sú na seba kolmé;
- je bijektívne zobrazenie, ktoré každému bodu $B \in E_2$ priradí usporiadanú dvojicu reálnych čísel (u, v).

4. Polárna súradnicová sústava

Nech v rovine E_2 je daná polpriamka p so začiatkom P.
Nech je daná jednotka na polpriamke p, $|PJ| = 1$.
Nech $B \in E_2$ je ľubovoľný bod, $B \neq P$.



Číslo $\rho = |PB|$ nazveme prvou polárnou súradnicou bodu B.

Veľkosť orientovaného uhla $\varphi = \measuredangle\left(p, \overrightarrow{PB}\right)$ (kladný smer je proti smeru hodinových ručičiek) nazveme druhou polárnou súradnicou bodu B.
Ak $B = P$, tak $\rho = 0$, $\varphi = 0$.

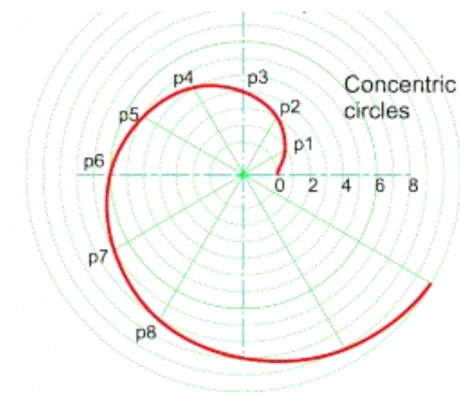
Polárna súradnicová sústava je bijektívne zobrazenie, ktoré každému bodu $B \in E_2$ priradí usporiadanú dvojicu reálnych čísel (ρ, φ), pričom $\rho \in \langle 0, \infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Bod P nazývame pól, polpriamku p polárna os,

ρ je modul, sprievodič, φ je polárny uhol, amplitúda.

Využitie: vyjadrenie kriviek, napr. špirál, fyzika,...

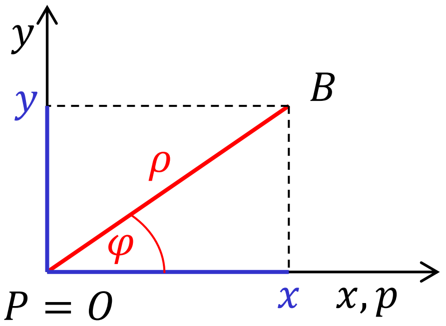
Archimedova špirála



Karteziánsku súradnicovú sústavu a polárnu súradnicovú sústavu nazveme pridruženými súradnicovými sústavami, ak $P = O$, polárna os p je totožná s kladnou poloosou x a sústavy majú rovnaké jednotky.

Transformačné vzťahy z polárnej súradnicovej sústavy do karteziánskej:

$$x = \rho cos\varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi.$$



Transformačné vzťahy z karteziánskej súradnicovej sústavy do polárnej:

$$B \neq P: \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$B = P: \qquad \rho = 0, \qquad \varphi = 0.$$

Súradnicové sústavy v priestore (E_3)

1. Karteziánska súradnicová sústava

- určená začiatkom O, kolmými osami x, y, z, ktoré prechádzajú bodom O a tromi rovinami $\pi = (x, y)$, $\nu = (x, z), \mu = (y, z)$.
- je bijektívne zobrazenie, ktoré každému bodu $B \in E_3$ priradí usporiadanú trojicu reálnych čísel $[x, y, z]$.

B_1- kolmý priemet bodu B do roviny $\pi = (x, y)$

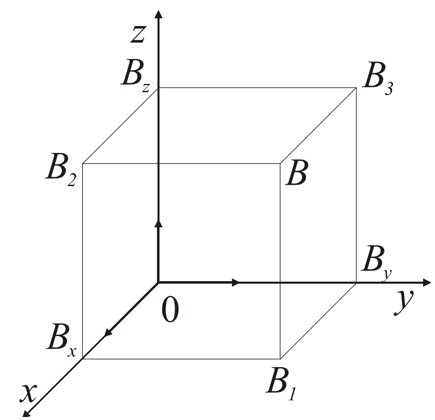
B_2- kolmý priemet bodu B do roviny $\nu = (x, z)$

B_3- kolmý priemet bodu B do roviny $\mu = (y, z)$

$|OB_x|$=$|BB_3|$ x-ová súradnica bodu B

$|OB_y|$=$|BB_2|$ y-ová súradnica bodu B

$|OB_z|$=$|BB_1|$ z-ová súradnica bodu B

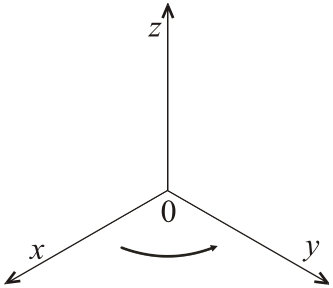


Nech $A[x^A, y^A, z^A]$, B$[x^B, y^B, z^B]$.
Vzdialenosť bodov A, B vypočítame:

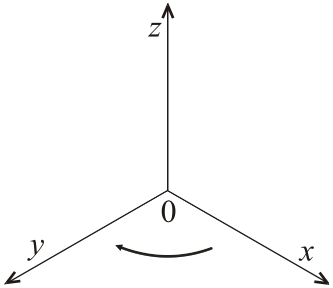
$$|AB| = \sqrt{(x^A - x^B)^2 + (y^A - y^B)^2 + (z^A - z^B)^2}$$

Karteziánska súradnicová sústava môže byť:

- pravotočivá
(budeme používať)



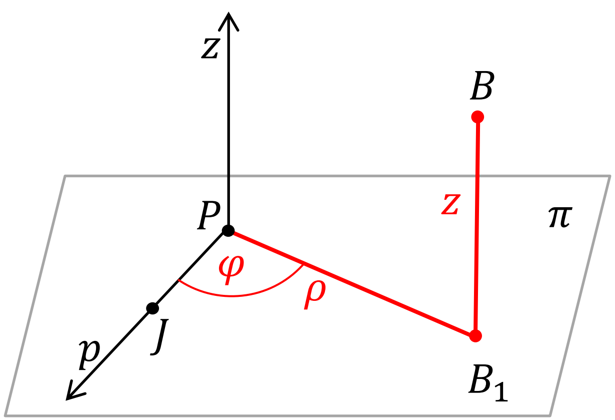
- ľavotočivá



2. Cylindrická súradnicová sústava

Nech v priestore E_3 je daná rovina π a v nej je definovaná polárna súradnicová sústava.
V bode P zostrojíme priamku $z \perp \pi$.

Nech $B \in E_3$ a B_1 je jeho kolmý priemet do roviny π.



$z = +|BB_1|$,
ak B leží nad rovinou π,
$z = -|BB_1|$,
ak B leží pod rovinou π,
$z \in (-\infty, \infty)$.

Bijektívne zobrazenie, ktoré bodu $B \in E_3$ priradí usporiadanú trojicu reálnych čísel (ρ, φ, z), pričom $\rho \in \langle 0, \infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$ nazveme cylindrickou (valcovou) súradnicovou sústavou.

Transformačné vzťahy
z cylindrickej do karteziánskej súradnicovej sústavy:

$$x = \rho \cos \varphi \,,$$
$$y = \rho \, sin\varphi,$$
$$z = z.$$

3. Sférická súradnicová sústava

Nech v priestore E_3 je daná rovina π a v nej je definovaná polárna súradnicová sústava.

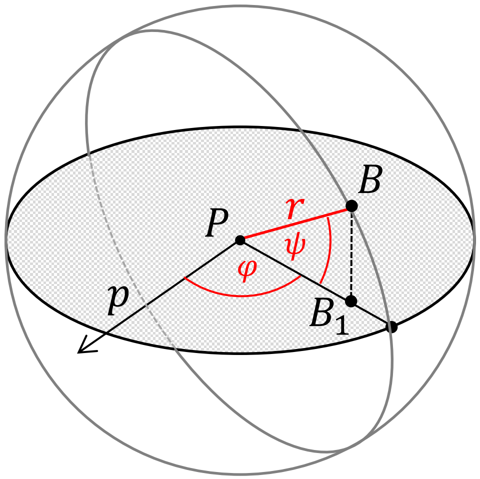
Nech $B \in E_3$ a B_1 je jeho kolmý priemet do roviny π.

$|PB| = r$,

$\measuredangle B_1PB = \psi$, pričom

$\psi > 0$, ak bod B leží nad π,

$\psi < 0$, ak bod B leží pod π.



Bijektívne zobrazenie, ktoré bodu $B \in E_3$ priradí usporiadanú trojicu reálnych čísel (r, φ, ψ) nazveme sférickou súradnicovou sústavou, pričom $r \in \langle 0, \infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, $\psi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Transformačné vzťahy
zo sférickej do karteziánskej súradnicovej sústavy:

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,$$
$$y = r\ sin\ \varphi\ cos\ \psi,$$
$$z = r\sin\psi\,.$$

Zobrazenia

Zobrazenie množiny M do množiny $M´$ je pravidlo (predpis), pomocou ktorého každému bodu A z množiny M priradíme práve jeden bod $A´$ z množiny $M´$.

Ak aj platí, že každému bodu $A´$ z množiny $M´$ priradíme práve jeden bod A z množiny M, hovoríme o jednojednoznačnom zobrazení (bijekcii).

Ak platí $M = M´$, potom zobrazenie nazývame tiež transformácia na množine M.

Zobrazenia môžeme skladať, ale skladanie zobrazení nie je komutatívne, t. j. záleží na poradí, v akom zobrazenia skladáme.

Zobrazenie nazveme lineárnym, ak tri rôzne kolineárne body zobrazí do troch rôznych kolineárnych bodov (kolineárne body sú body, ktoré patria jednej priamke). Takéto zobrazenie sa nazýva aj afinné.

Lineárnu transformáciu v rovine s karteziánskou súradnicovou sústavou môžeme zapísať rovnicami :

$$x' = a_1 x + a_2 y + a_3$$
$$y' = b_1 x + b_2 y + b_3 \;,$$

kde $[x, y]$ sú súradnice bodu A a $[x', y']$ sú súradnice bodu A'. Bod A' je obraz bodu A v lineárnej transformácii.

Ak determinant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, tak hovoríme o regulárnej afinnej transformácii.

Regulárna afinná transformácia zachováva deliaci pomer bodov na priamke, pomer obsahov rovinných útvarov, rovnobežnosť.

Poznámka. Nech A, B, C sú body jednej priamky, pričom $A \neq B, B \neq C$.

Deliaci pomer (podielový pomer) bodu C vzhľadom na body A, B (v tomto poradí) je číslo $\lambda_C = (ABC)$, pre ktoré platí $\lambda_C = \frac{|AC|}{|BC|}$, pričom $\lambda_C > 0$, práve vtedy, keď C neleží na úsečke AB a $\lambda_C < 0$, keď C leží na úsečke AB.

Pre stred S úsečky je deliaci pomer vzhľadom na jej krajné body $\lambda_S = -1$.

Lineárne zobrazenia v rovine

Zhodné zobrazenia (zhodnosti) v rovine

Afinnú transformáciu nazveme zhodnosťou, ak pre každé dva body X, Y a ich obrazy $X'Y'$ platí:

$$|XY| = |X'Y'|,$$

t. j. transformácia zobrazí každú úsečku do úsečky rovnako dlhej (zachováva dĺžku úsečky).

Medzi zhodnosti v rovine patria: posunutie, otočenie, osová súmernosť a stredová súmernosť.

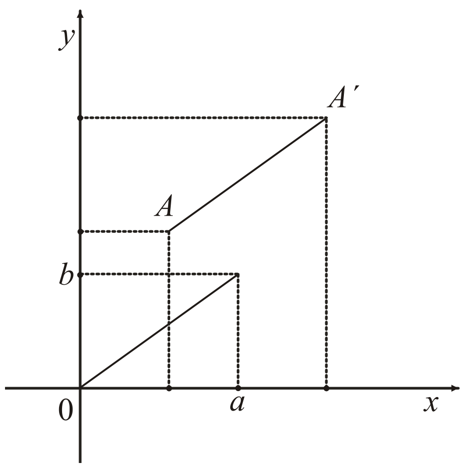
Posúvať a otáčať môžeme objekty alebo súradnicovú sústavu.

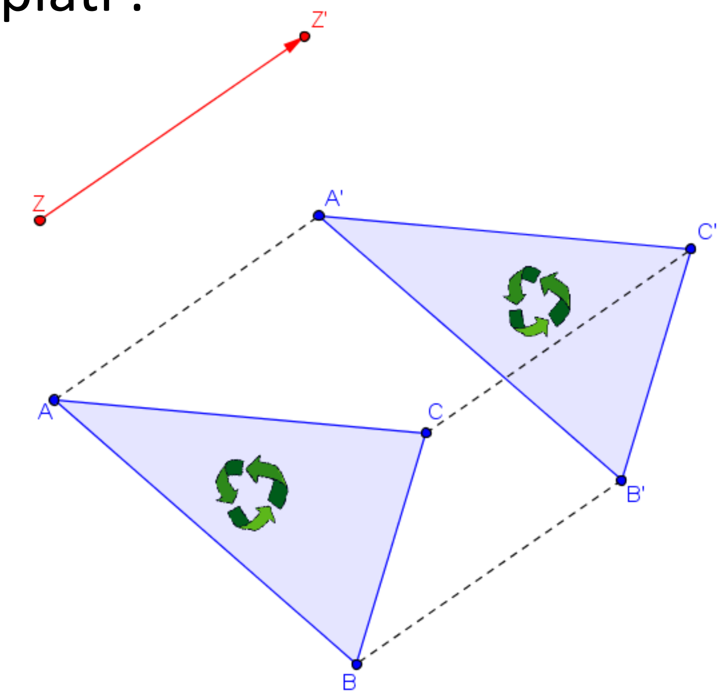
Posunutie (translácia)

je zobrazenie, ktoré bod $A[x, y]$
zobrazí do bodu $A'[x', y']$, pričom platí :

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

kde (a, b) sú súradnice
vektora posunutia.





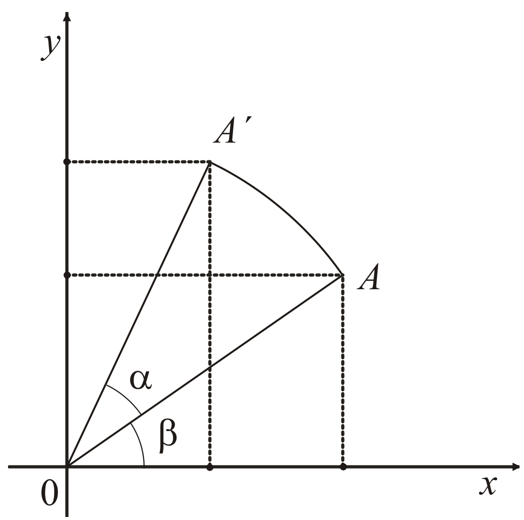
Otočenie (rotácia) bodu okolo začiatku súradnicovej sústavy o uhol α

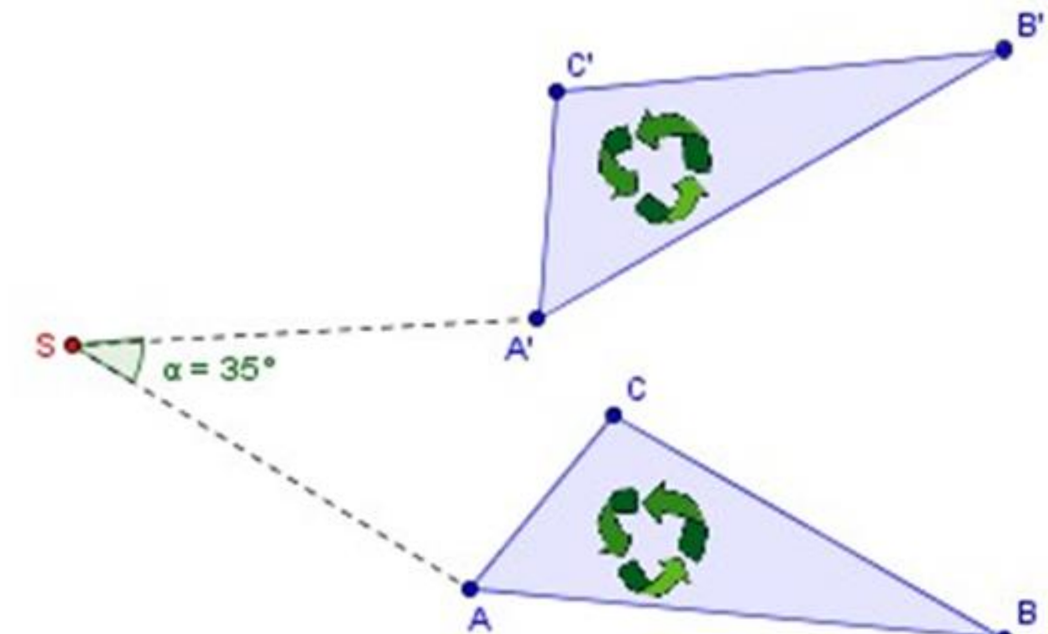
je zobrazenie, ktoré bod $A[x,y]$ zobrazí do bodu $A'[x',y']$, pričom platí :

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Otáčať môžeme aj okolo ľubovoľného bodu S.

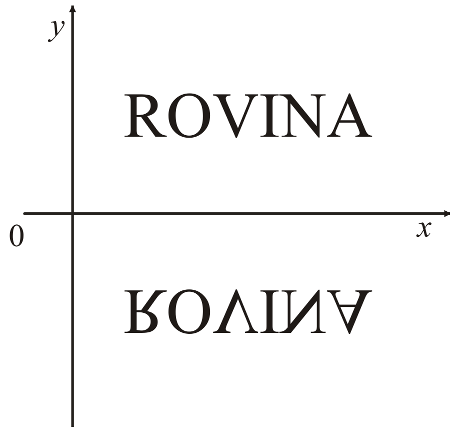


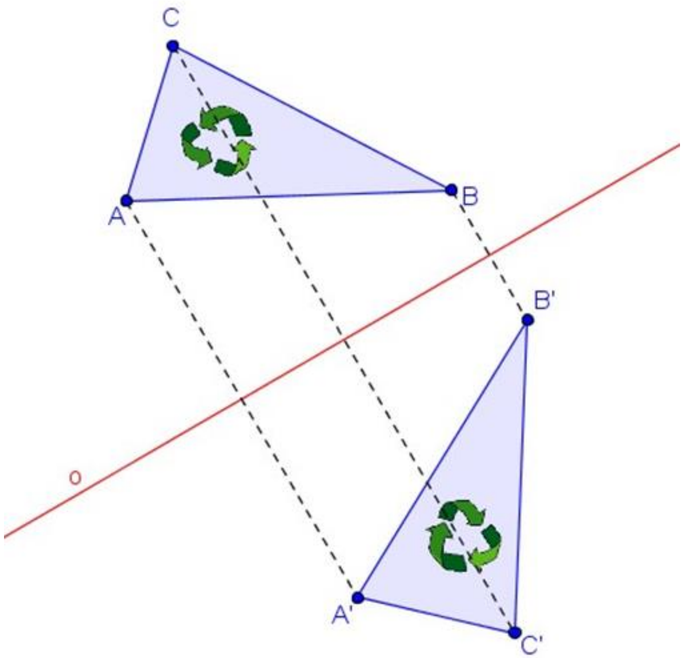


Osová súmernosť

s osou súmernosti v osi x je zobrazenie, ktoré bod $A[x, y]$ zobrazí do bodu $A'[x', y']$, pričom platí :

$$x' = x$$
$$y' = -y$$





Ak osou súmernosti je os y, potom

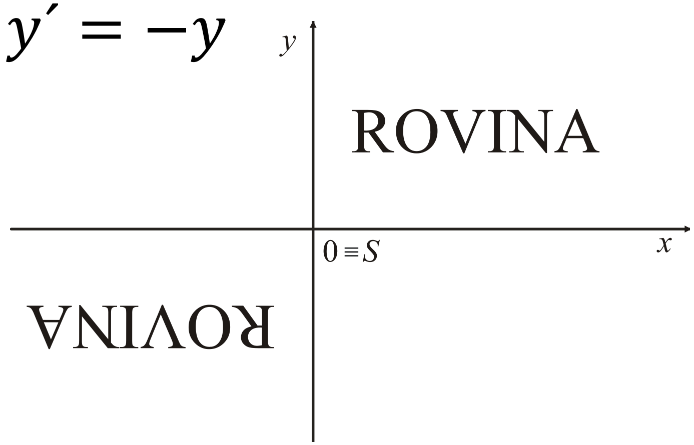
$$x' = -x$$
$$y' = y$$

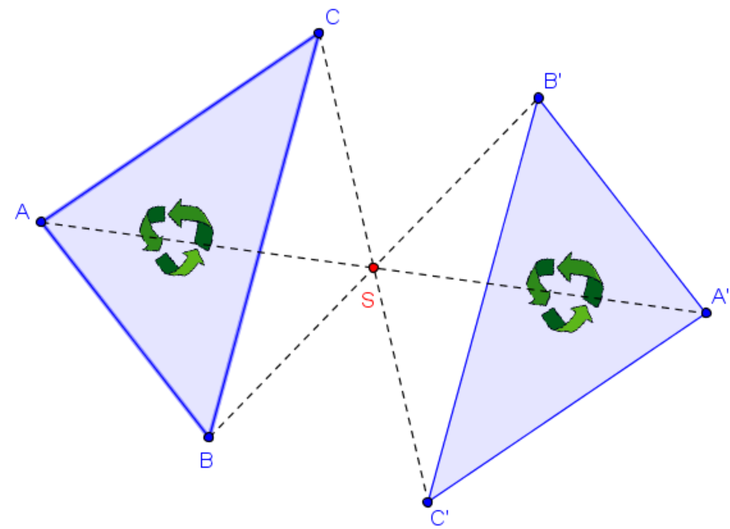
Ak osou súmernosti je ľubovoľná priamka, tak rovnice sa dajú odvodiť priamo alebo pomocou súčinu matíc zobrazení, na ktoré danú súmernosť rozložíme.

Stredová súmernosť

so stredom súmernosti v začiatku súradnicovej sústavy O je zobrazenie, ktoré bod $A[x,y]$ zobrazí do bodu $A'[x',y']$, pričom platí :

$$x' = -x$$
$$y' = -y$$





Stredová súmernosť je otočenie o uhol 180°.

Ďalšie zobrazenia v rovine (nie zhodné):

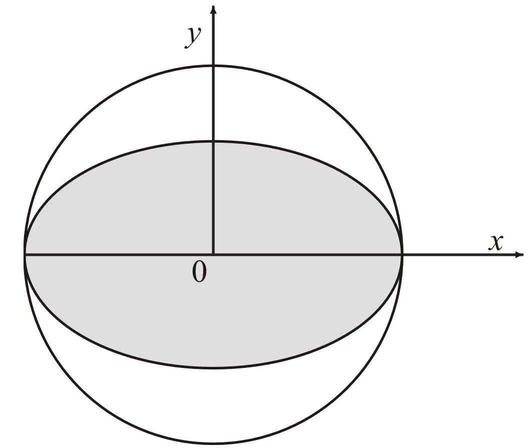
Ak zobrazovacie rovnice nadobudnú napr. tvar:

$$x' = x + a_2 y$$
$$y' = b_2 y, \;\; b_2 \neq 0 \;,$$

potom dostaneme osovú afinitu, t. j. afinnú transformáciu s bodovo samodružnou priamkou – osou x.

Príklad. Vypočítajte súradnice obrazov vrcholov štvorca $ABCD, A[0,0], B[1,0], C[1,1]$ v osovej afinite danej rovnicami $x' = x + 2y, \;\; y' = 3y$.

Ak zobrazovacie rovnice majú tvar
$x' = x, \quad y' = b_2 y,$
tak danou afinitou meníme výšku útvaru (veľkosť útvaru v smere osi *y*).



Ak zobrazovacie rovnice majú tvar $x' = a_1 x,\ y' = y,$
tak meníme šírku (veľkosť útvaru v smere osi *x*).

Zložením takýchto dvoch afinít vznikne zobrazenie, ktorým môžeme meniť šírku a výšku útvarov, $x' = a_1 x,\ y' = b_2 y,$ kde a_1 mení šírku a b_2 výšku.

Ak $a_1 > 1, b_2 > 1$, útvar zväčšujeme.
Ak $0 < a_1 < 1, 0 < b_2 < 1$, útvar zmenšujeme.

Ak $a_1 = b_2$, zobrazenie je rovnoľahlosť so stredom O a koeficientom $k = a_1 = b_2$.

Nelineárne zobrazenie v rovine

Nelineárne zobrazenia sú zobrazenia, ktoré nezachovávajú priamku, teda ju deformujú.

Majú význam v počítačovej grafike, kde sa s ich pomocou dosahujú zaujímavé a efektné tvary nápisov, deformácie obrazcov,...

Rovnice nelineárneho zobrazenia sú:

$$x' = f(x, y),$$

$$y' = g(x, y),$$

kde $f(x, y)$, $g(x, y)$ sú nelineárne funkcie s premennými x a y.

Zobrazenia v priestore

Lineárnu transformáciu v priestore E_3 s karteziánskou súradnicovou sústavou môžeme zapísať rovnicami:

$$x' = a_1x + a_2y + a_3z + a_4$$
$$y' = b_1x + b_2y + b_3z + b_4$$
$$z' = c_1x + c_2y + c_3z + c_4,$$

kde $[x, y, z]$ sú súradnice bodu A a $[x', y', z']$ sú súradnice bodu A'. Bod A' je obraz bodu A. Takéto zobrazenie nazývame tiež afinným.

Ak determinant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, tak hovoríme o regulárnej afinnej transformácii.

V priestore môžeme obdobným spôsobom definovať zhodné zobrazenia (posunutie v priestore, otočenie bodu okolo osi o uhol, rovinnú súmernosť,...) ako i iné lineárne i nelineárne zobrazenia.

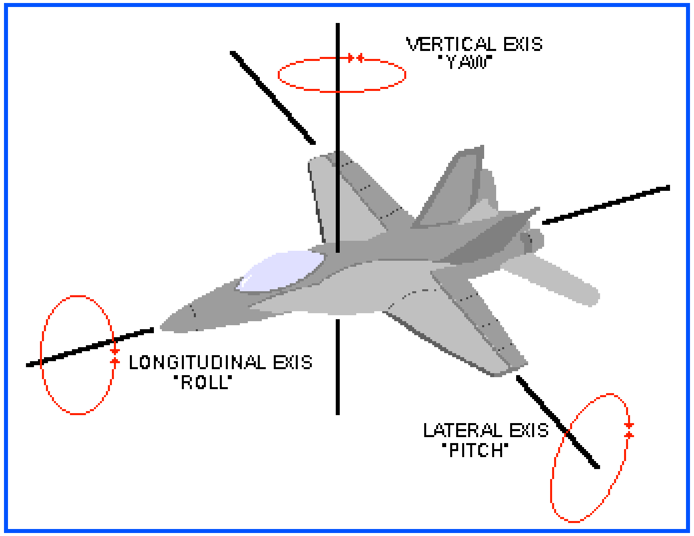
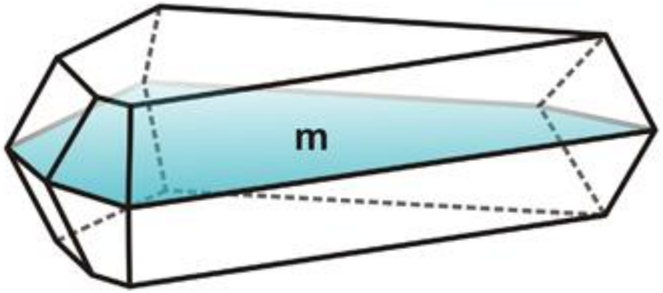
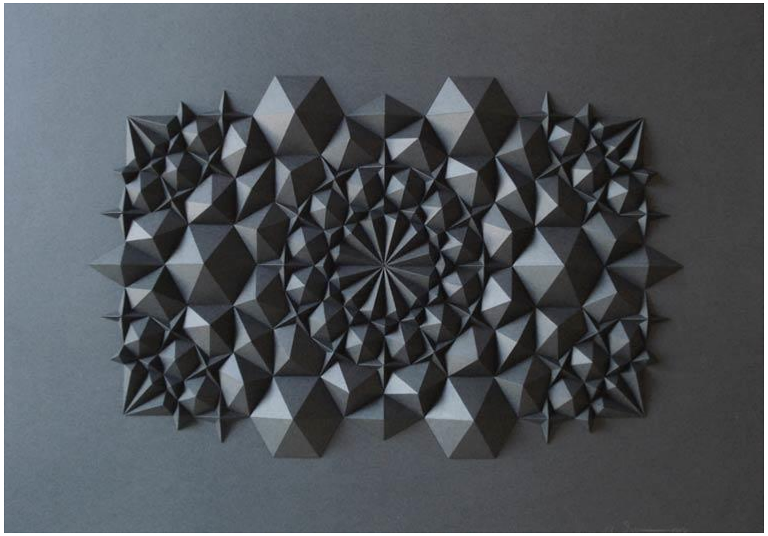


Figure 5-1 The axis of rotation.





Ďakujem za pozornosť.