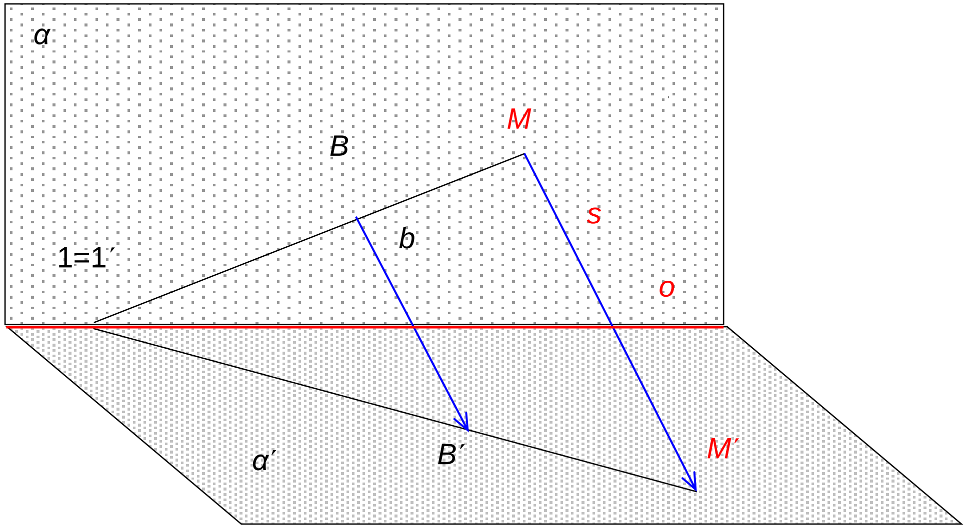
Perspektívna a osová afinita

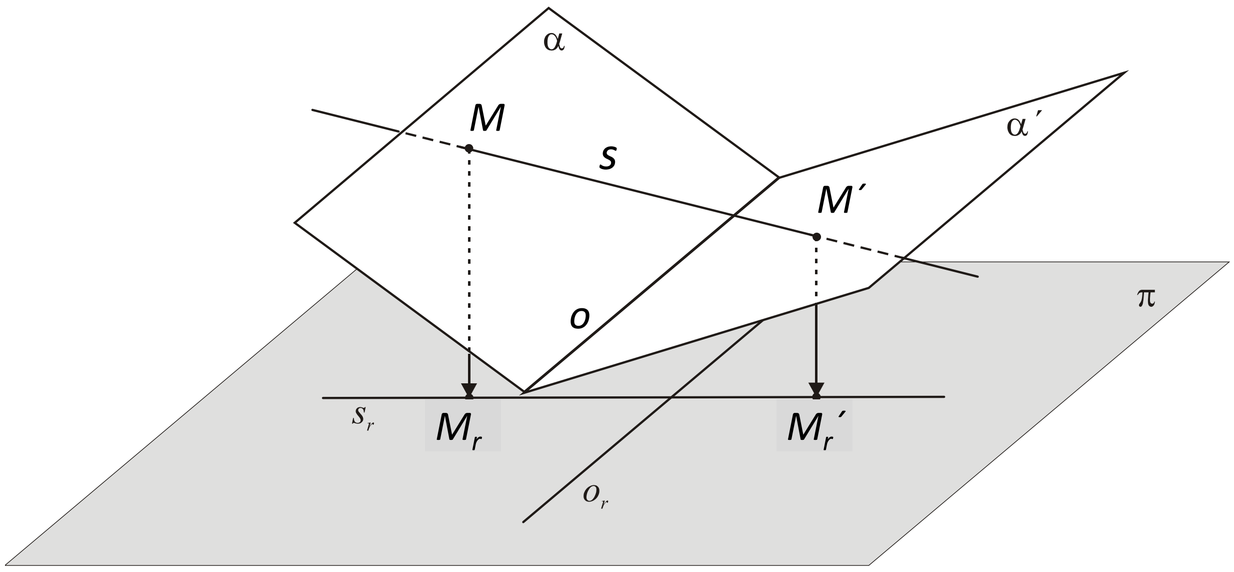
Nech sú dané dve rôznobežné roviny α, α' s priesečnicou *o* $(o = \alpha \cap \alpha')$ a priamka s, ktorá nie je rovnobežná ani s jednou z rovín α, α'.



Zobrazenie, ktoré každému bodu $B \in \alpha$ priradí bod $B' \in \alpha'$ tak, že $B' = b \cap \alpha'$, kde b je priamka prechádzajúca bodom *B* a rovnobežná s priamkou s, nazývame perspektívnou afinitou roviny *α* na rovinu *α´*. Priesečnicu *o* nazývame osou, priamku s smerom, B, B' sú odpovedajúce si body v perspektívnej afinite.

Nech je daná perspektívna afinita (PA) určená rovinami α, α' a smerom s. Nech je dané rovnobežné premietanie s priemetňou π.

Rovnobežným priemetom PA do priemetne je osová afinita, ktorej smer je rovnobežným priemetom smeru PA, os je rovnobežným priemetom osi PA a pár odpovedajúcich si bodov je rovnobežným priemetom páru odpovedajúcich si bodov v PA.



Osovú afinitu môžeme definovať aj priamo:

Nech v rovine α je daná priamka o a dva body $M, M´$, ktoré neležia na priamke o. Zobrazenie v rovine α, pre ktoré platí :

- bod a jeho obraz ležia na priamke rovnobežnej so smerom $s = MM´$;
- zobrazenie je bijektívne;
- priamka sa zobrazí na priamku, bod na priamke sa zobrazí do bodu na obraze priamky;
- bod na priamke o sa zobrazí sám do seba, teda je samodružný;

nazývame osovou afinitou so smerom $s = MM´$ a osou o.

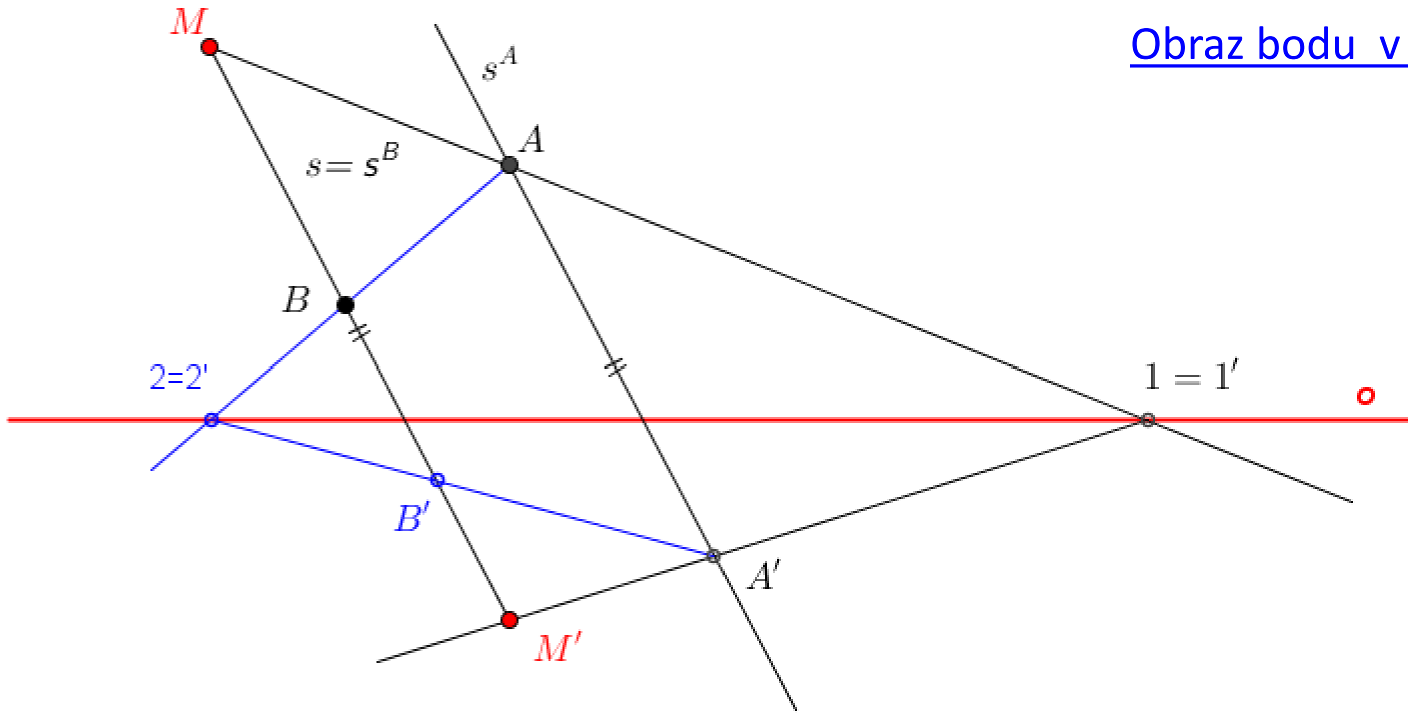
Osová afinita je určená osou o a párom odpovedajúcich si bodov $M, M´$ (tým je určený aj smer s).
Označenie $OA(o, M, M´)$.

Ďalšie vlastnosti osovej afinity:

- priamka a jej obraz sa pretínajú na osi afinity,
- inverzné zobrazenie je opäť osová afinita s tou istou osou a tým istým párom odpovedajúcich si bodov,
- zachováva rovnobežnosť priamok,
- zachováva deliaci pomer bodov na priamke (stred úsečky).

Príklad. Zostrojte obrazy bodov A, B v $OA(o, M, M')$.

Obraz bodu v OA



A' : $s^A : A \in s^A, s^A \parallel MM'$

AM

$AM \cap o = 1 = 1'$

$1'M'$

$1'M' \cap s^A = A'$

B' : $s^B = MM' = s$

AB

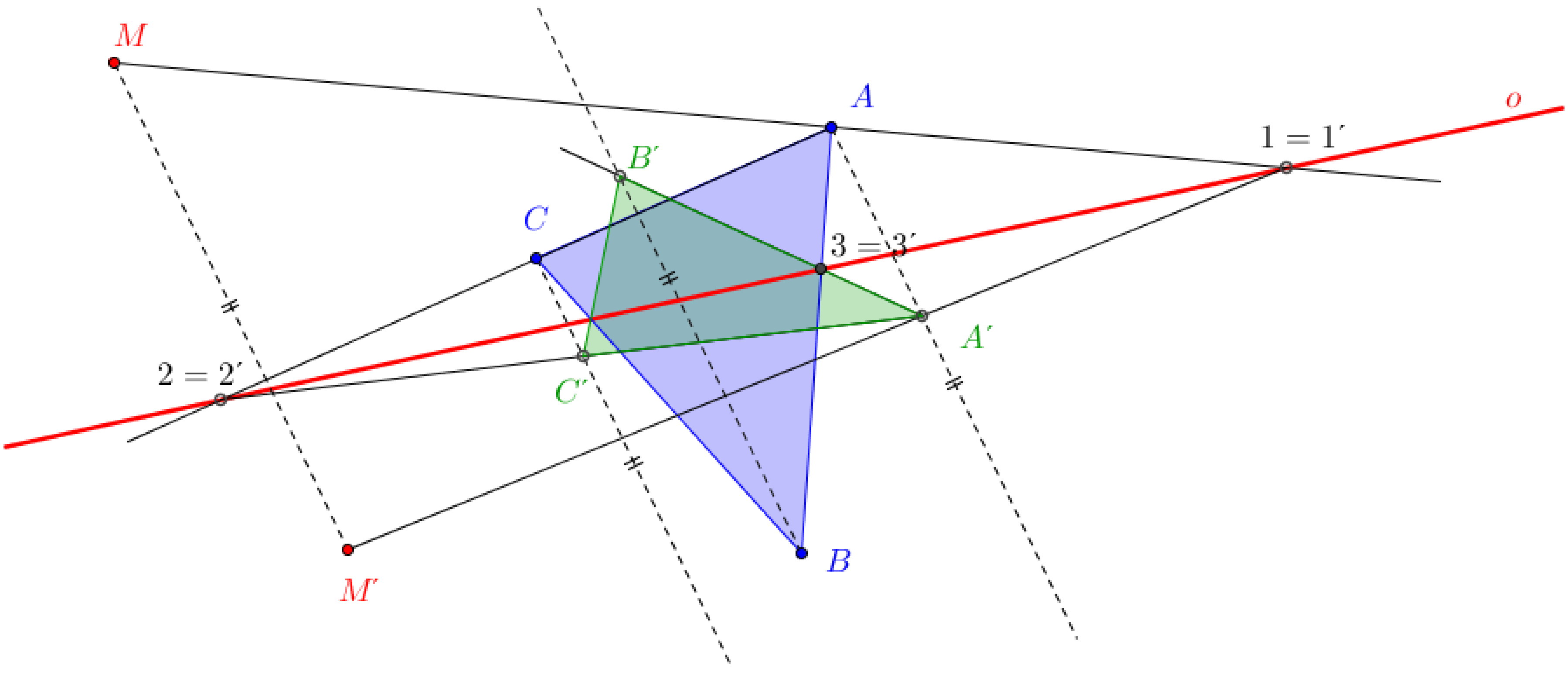
$AB \cap o = 2 = 2'$

$2'A'$

$2'A' \cap s^B = B'$

Príklad. Zostrojte obraz trojuholníka ABC v $OA(o, M, M')$.

[Obraz trojuholníka v OA]

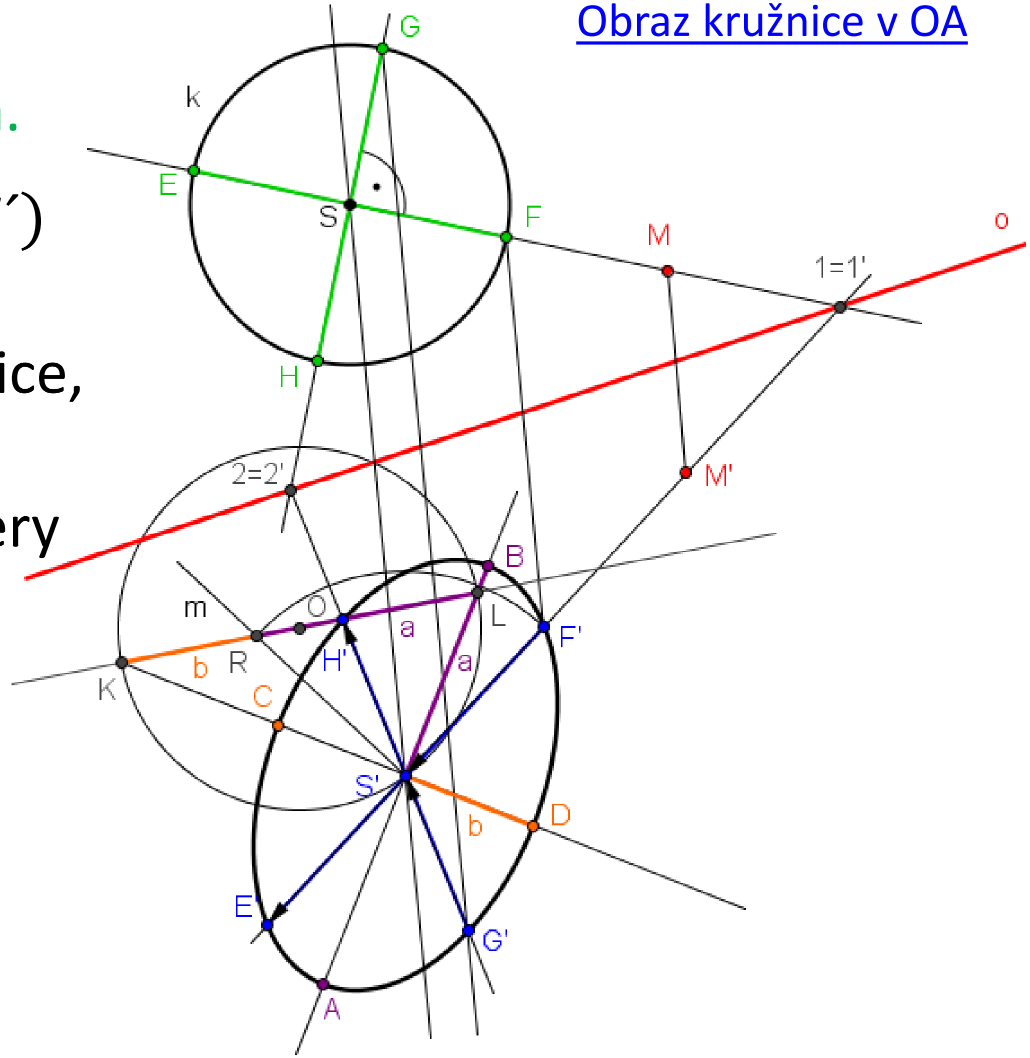


Príklad. Zostrojte obraz kružnice $k = (S, r)$ v $OA(o, M, M')$.

Obrazom kružnice
v OA je elipsa alebo kružnica.

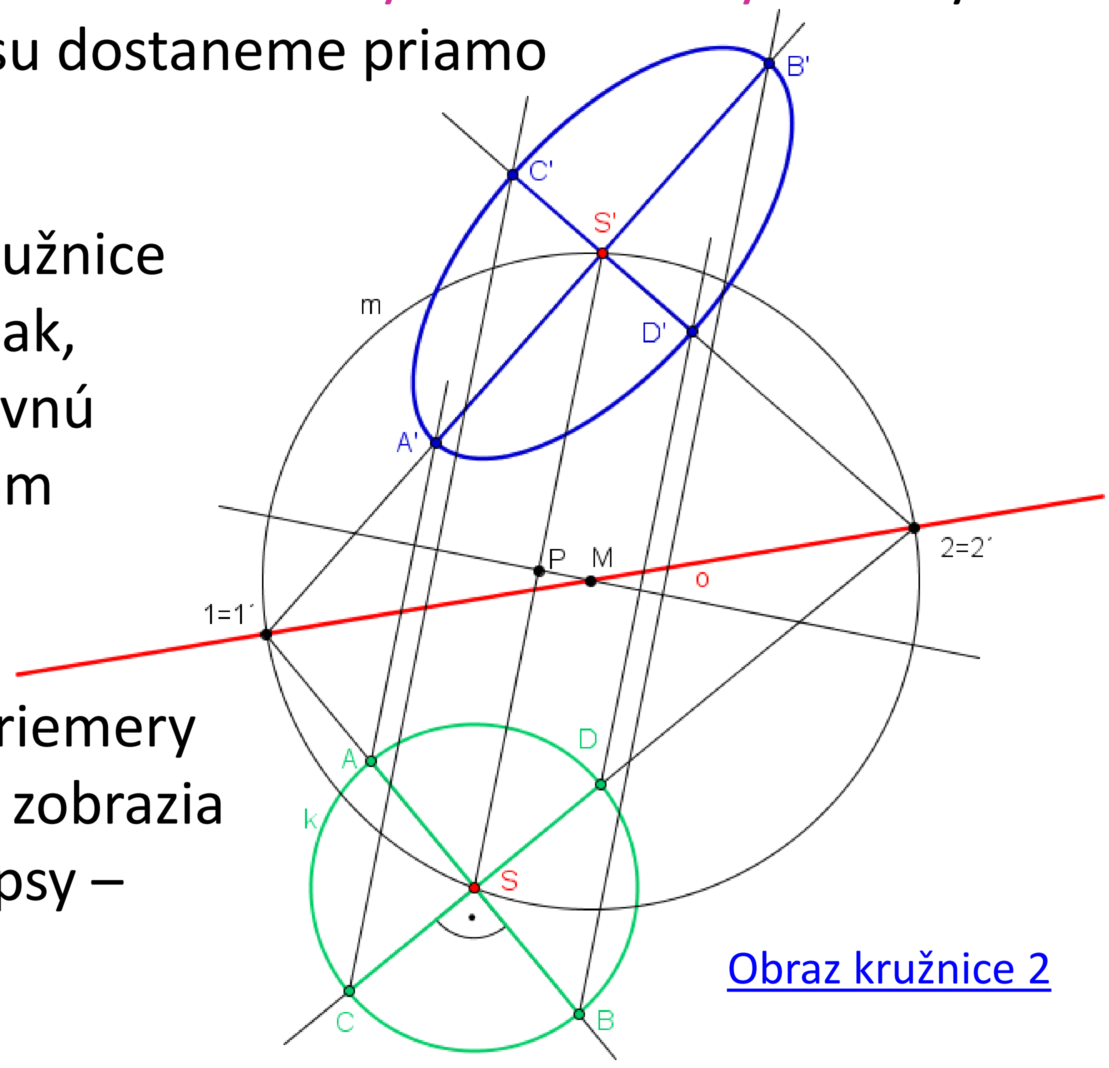
[Obraz kružnice v OA]

Zostrojíme obraz stredu S (S') a potom obraz ľubovoľných združených priemerov kružnice, napr. $EF, GH, (EF \subset SM)$. Dostaneme združené priemery elipsy $E'F', G'H'$. Hlavné a vedľajšie vrcholy elipsy zostrojíme pomocou Rytzovej konštrukcie a elipsu vykreslíme pomocou oskulačných kružníc.



Poznámka. Ak smer afinity MM' je kolmý na os afinity, vhodné je zvoliť jeden priemer kružnice rovnobežný s osou afinity a druhý naň kolmý, vtedy pre elipsu dostaneme priamo hlavnú a vedľajšiu os.

Príklad. Zostrojte obraz kružnice $k=(S,r)$ v $OA(o,S,S')$ tak, aby ste dostali priamo hlavnú a vedľajšiu os elipsy, pričom SS' nie je kolmé na os o.

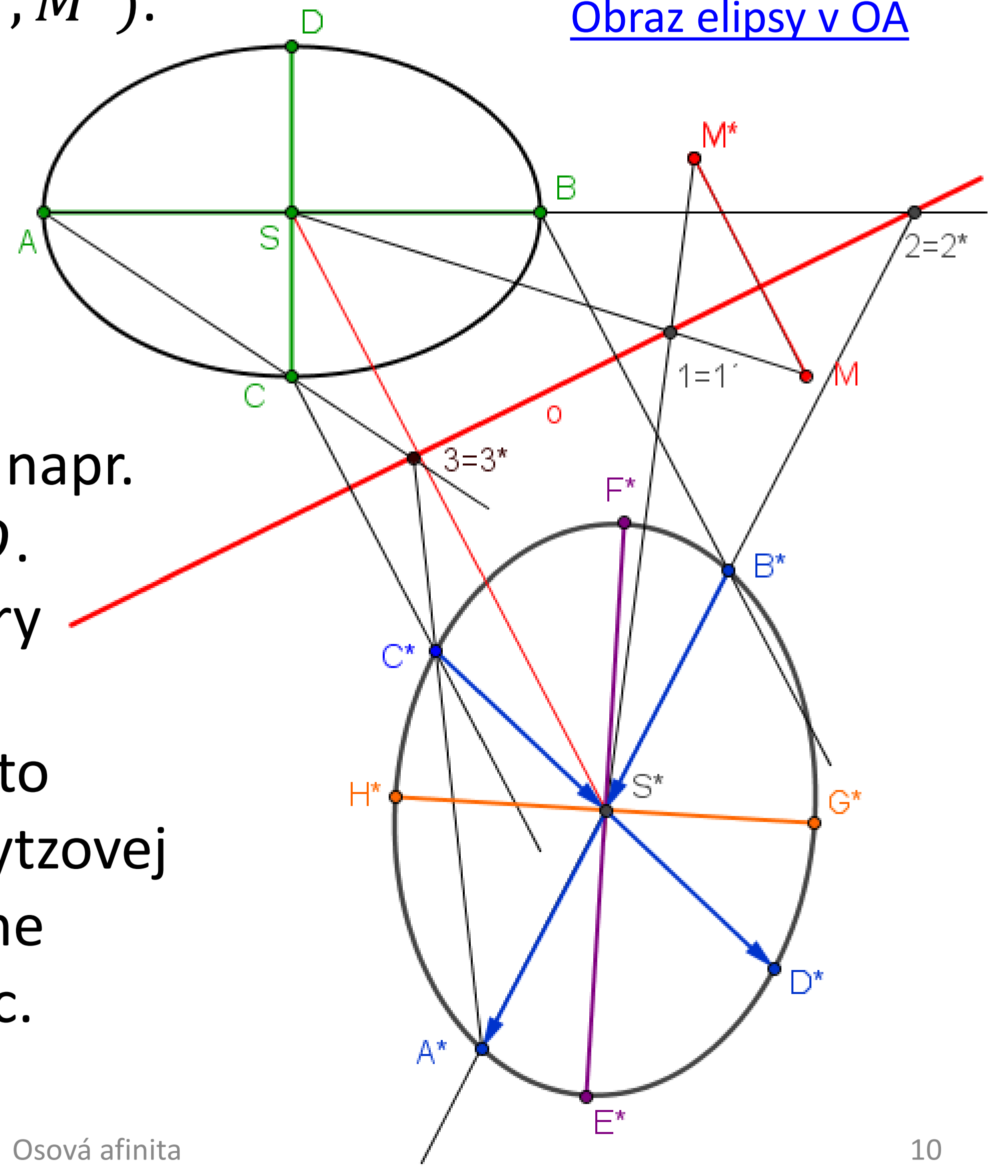


Hľadáme také združené priemery AB, CD kružnice, ktoré sa zobrazia do kolmých priemerov elipsy – hlavnej a vedľajšej osi.

Obraz kružnice 2

Príklad. Zostrojte obraz elipsy určenej hlavnými a vedľajšími vrcholmi A, B, C, D v $OA(o, M, M^*)$.

Obraz elipsy v OA

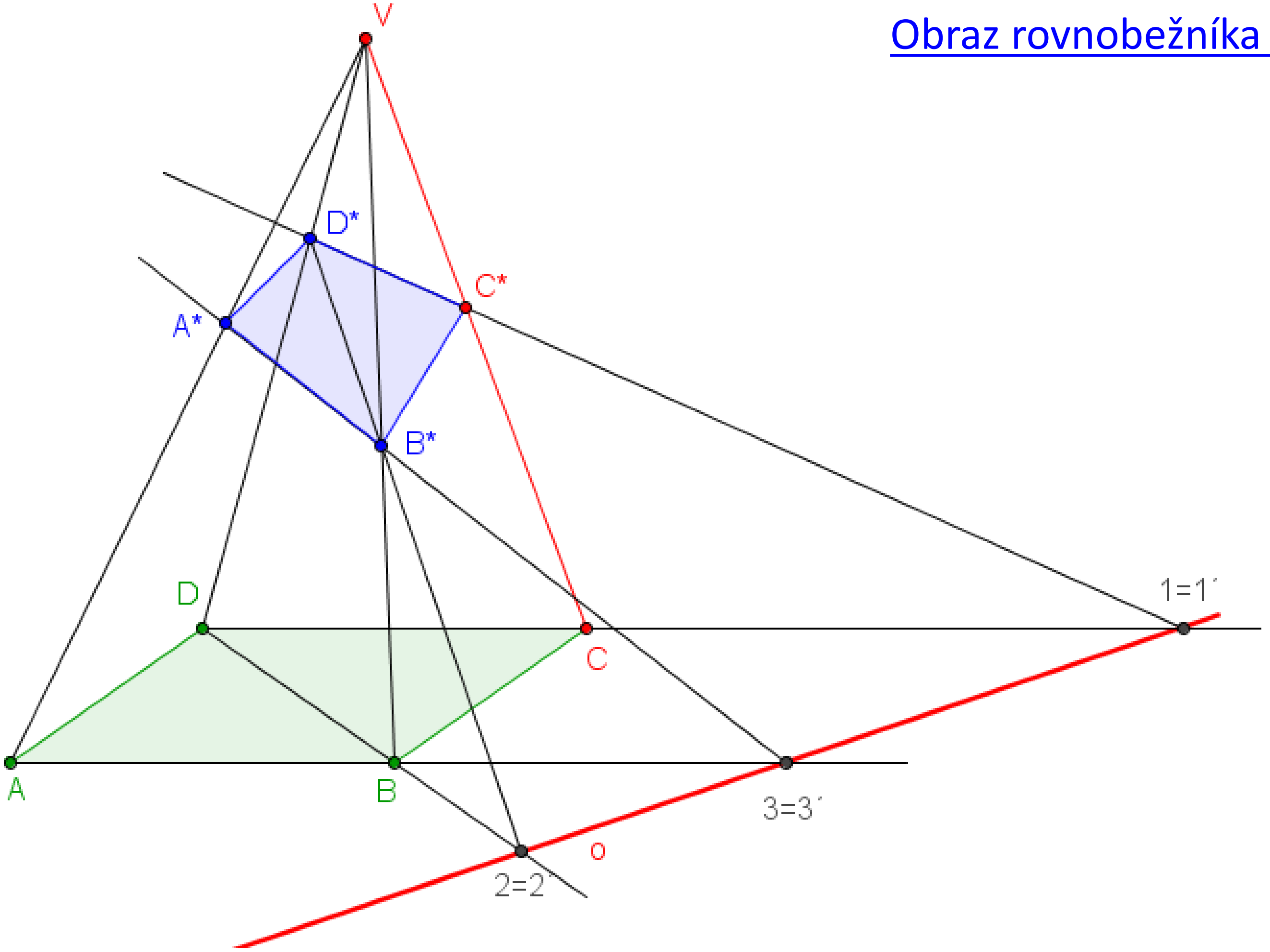


Obrazom elipsy v OA je elipsa alebo kružnica.

Zostrojíme obraz stredu S a potom obraz ľubovoľných združených priemerov elipsy, napr. hlavnej a vedľajšej osi AB, CD. Dostaneme združené priemery obrazu elipsy A^*B^*, C^*D^*. Hlavné a vedľajšie vrcholy tejto elipsy zostrojíme pomocou Rytzovej konštrukcie a elipsu vykreslíme pomocou oskulačných kružníc.

Príklad. Zostrojte obraz rovnobežníka $ABCD$ v osovej kolineácii určenej osou o, stredom V a párom odpovedajúcich si bodov C, C^*.

Obraz rovnobežníka v OK



Ďakujem za pozornosť