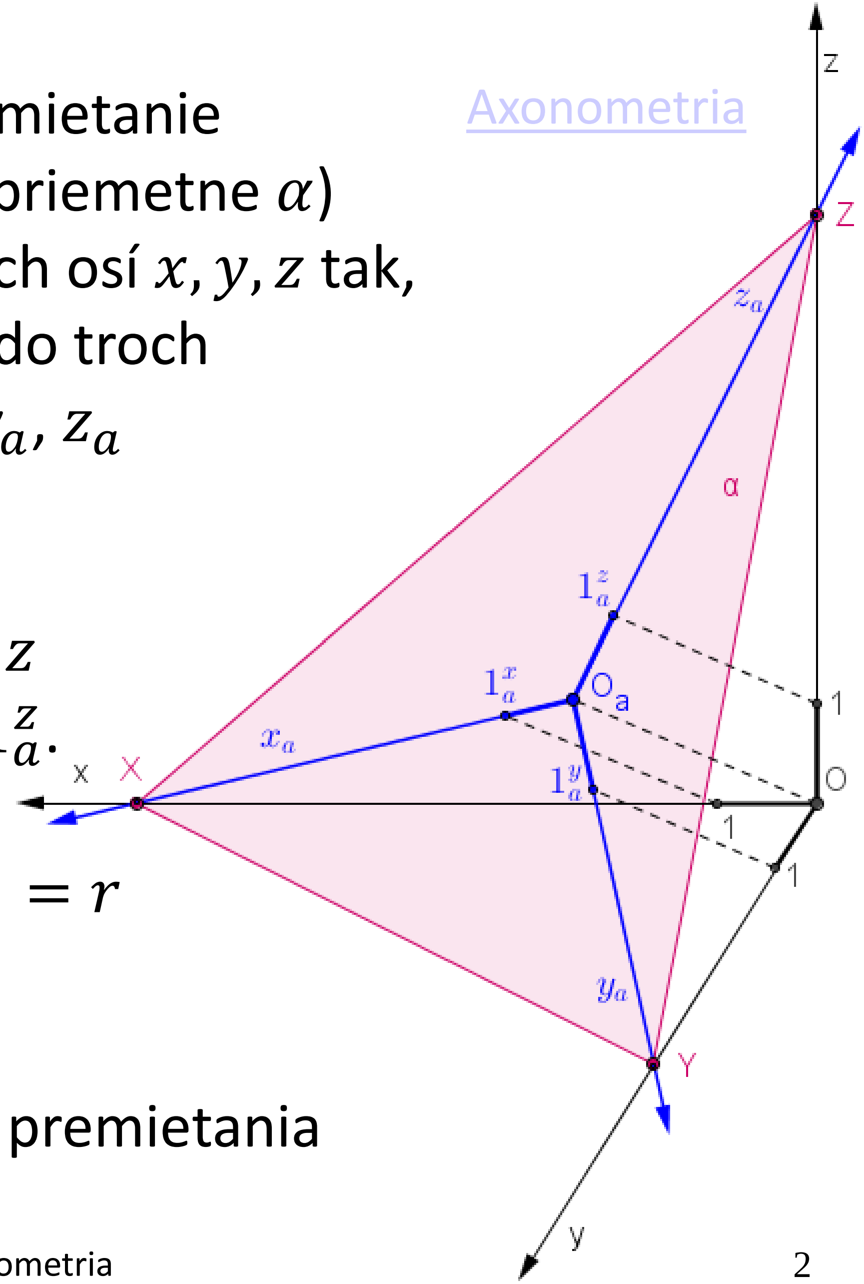
Axonometria

Axonometria

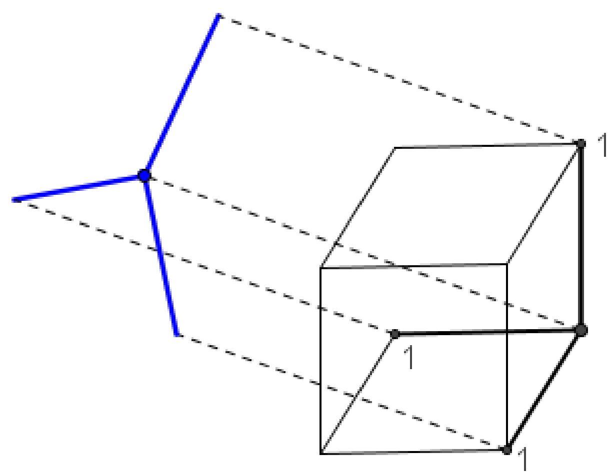
Axonometria je rovnobežné premietanie do priemetne (axonometrickej priemetne α) útvarov priestoru a súradnicových osí x, y, z tak, aby sa súradnicové osi zobrazili do troch navzájom rôznych priamok x_a, y_a, z_a s priesečníkom O_a.



Jednotkové body na osiach x, y, z sa premietnu do bodov $1_a^x, 1_a^y, 1_a^z$.
Ak označíme dĺžky úsečiek
$|1_a^x O_a| = p, |1_a^y O_a| = q, |1_a^z O_a| = r$
(koeficienty zmeny), tak platí
$p^2 + q^2 + r^2 = 2 + cotg^2\varphi$,
kde φ je uhol, ktorý zviera smer premietania s priemetňou.

Možno narysovať axonometrické priemety osí s jednotkami ľubovoľne?

Pohlkeho veta. Tri úsečky v rovine s jedným spoločným koncovým bodom, ktoré ležia na troch rôznych priamkach, možno vždy považovať za rovnobežný priemet troch susedných hrán nejakej kocky.



Poznámka. Priemet osi z rysujeme zvyčajne v zvislej polohe.

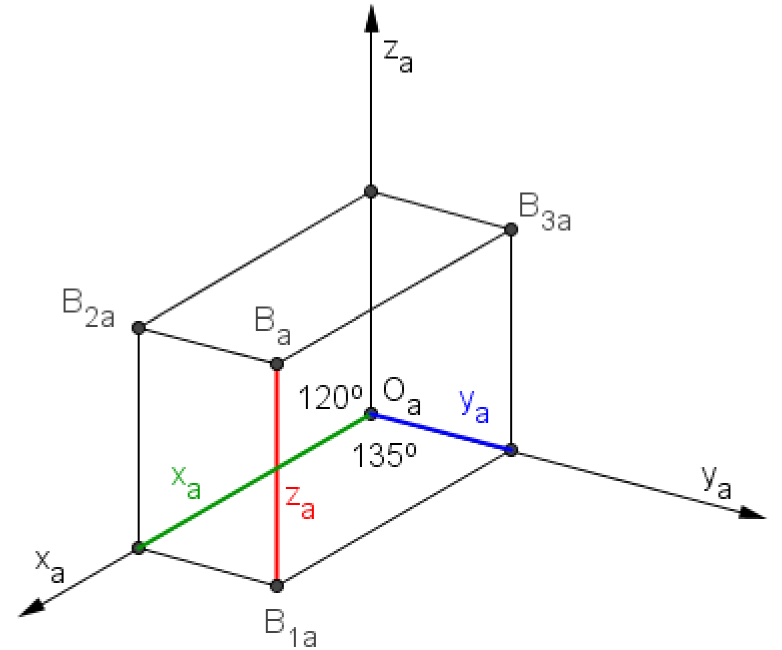
Súradnicové roviny nazývame:
- $\pi = (x, y)$ pôdorysňa, prvá priemetňa;
- $\nu = (x, z)$ nárysňa, druhá priemetňa;
- $\mu = (y, z)$ bokorysňa, tretia priemetňa.

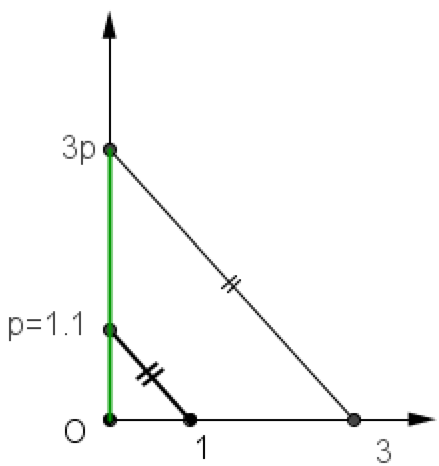
Ak poznáme polohu priemetov osí x_a, y_a, z_a a dĺžky p, q, r, môžeme pre bod $B[x^B, y^B, z^B]$ zostrojiť:

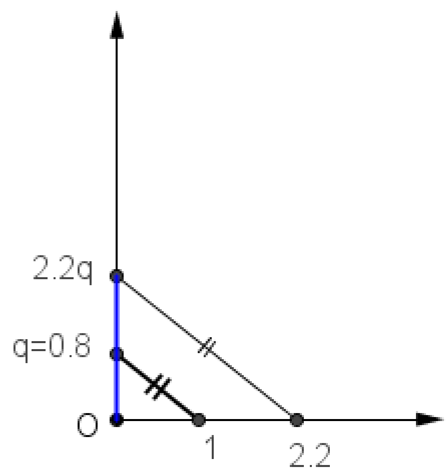
- axonometrický priemet B_a,
- axonometrický prvý priemet (axonometrický pôdorys) B_{1a},
- axonometrický druhý priemet (axonometrický nárys) B_{2a},
- axonometrický tretí priemet (axonometrický bokorys) B_{3a}.

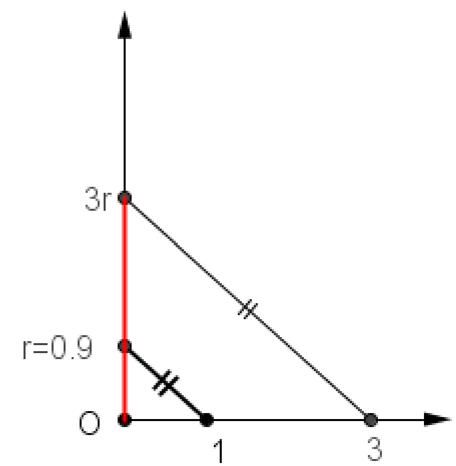
Obraz bodu v axonometrii je jednoznačne určený usporiadanou dvojicou priemetov, najčastejšie $B(B_a, B_{1a})$.

Príklad. Nech je daná axonometria:
$\measuredangle(x_a, z_a) = 120°, \measuredangle(x_a, y_a) = 135°,$
$p = 1{,}1; q = 0{,}8, ;\ r = 0{,}9$.
a) Zostrojte obraz bodu $B[3;\ 2{,}2;\ 3]$.
b) Aký uhol zviera smer premietania s priemetňou?









Poznámka. V axonometrii všetky priemety bodov, priamok,... by mali byť označované indexom: A_a, A_{1a}, p_a,..., ktorý však pre zjednodušenie vynechávame: A, A_1, p, ...

Klasifikácia axonometrií:

Podľa smeru premietania:

- ak je kolmý na priemetňu – kolmá (pravouhlá) axonometria;
- ak nie je kolmý na priemetňu – šikmá axonometria.

Ak axonometrická priemetňa pretína súradnicové osi v bodoch, ktoré vytvoria trojuholník – jednoduchá axonometria.

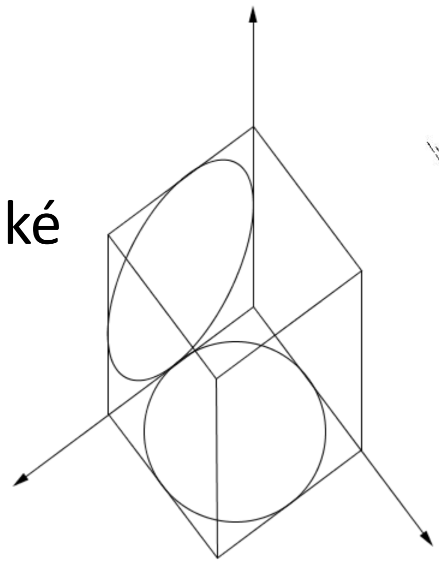
Ak axonometrickú priemetňu stotožníme s niektorou súradnicovou rovinou – degenerovaná axonometria (výhoda: rýchla konštrukcia axonometrického priemetu útvaru z jeho pôdorysu alebo nárysu).

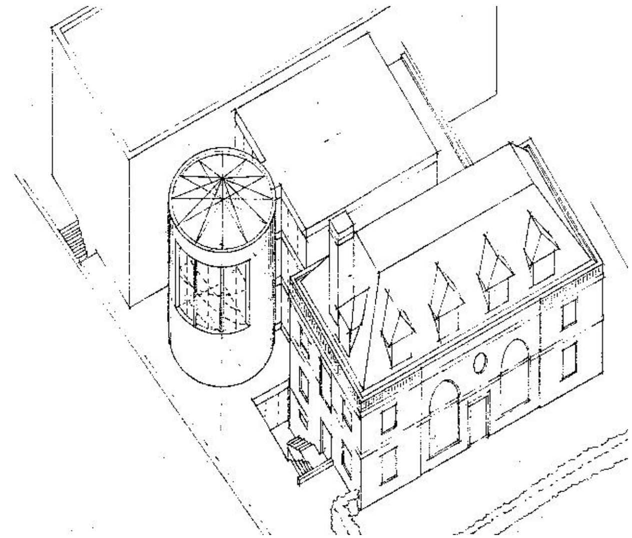
Niektoré špeciálne druhy axonometrie:

Vojenská axonometria

- osi x, y sú na seba kolmé;
- jednotky na osiach sú rovnaké

$$p = q = r.$$

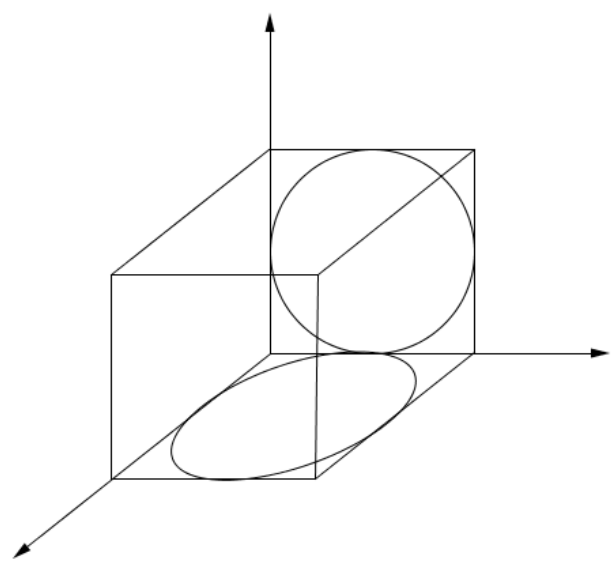




Kavalierna axonometria

- os y alebo x je kolmá na os z;
- jednotky na osiach sú rovnaké

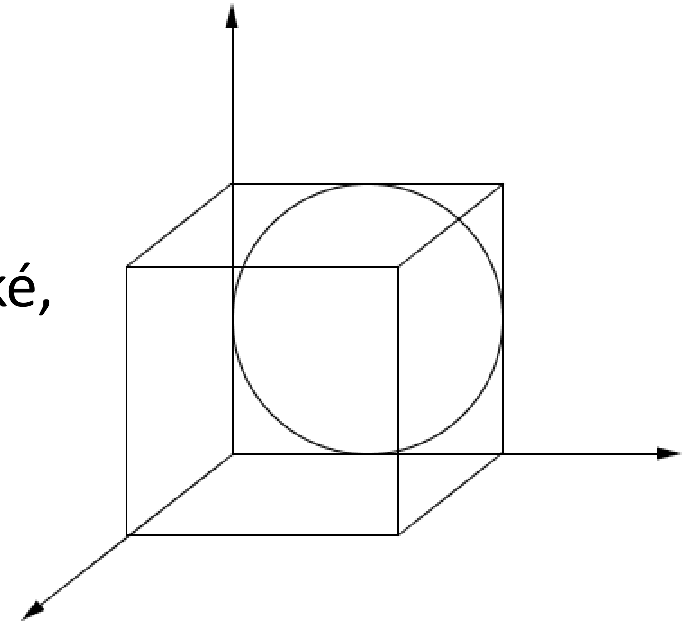
$$p = q = r.$$



Šikmé premietanie

- os y alebo x je kolmá na os z;
- jednotky na kolmých osiach sú rovnaké,

na zvyšnej osi je koeficient skrátenia
$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$



Ak koeficient skrátenia je $\frac{1}{2}$,
zobrazenie nazývame aj
voľné rovnobežné premietanie.

Príklad. Zostrojte obraz kocky vo voľnom rovnobežnom premietaní. Kocka má hranu dĺžky 3cm, jeden vrchol je v začiatku súradnicovej sústavy a jeho susedné vrcholy ležia na súradnicových osiach.

Zárezová metóda

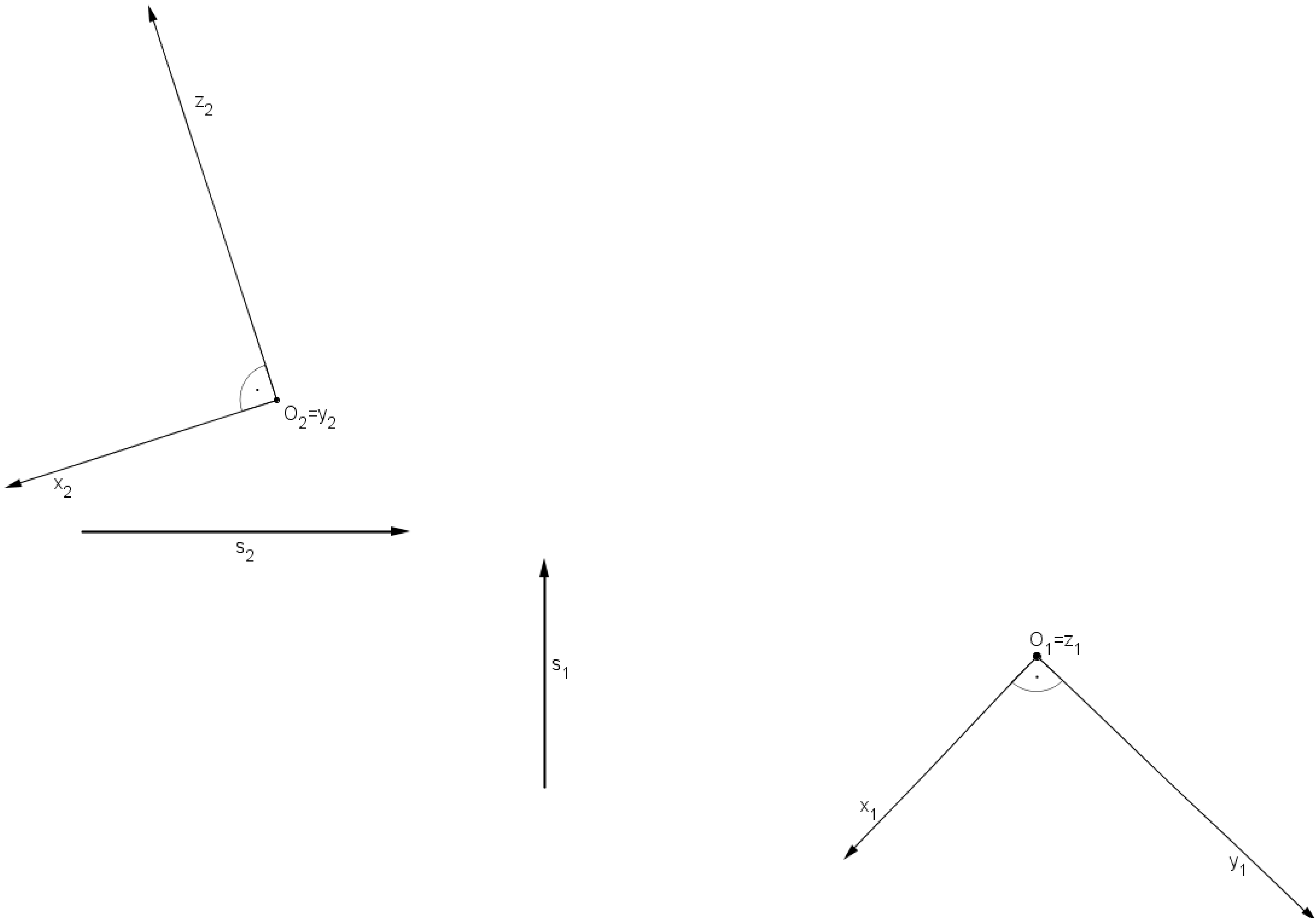
Nech pre daný útvar poznáme jeho prvý a druhý priemet (pohľad zhora a spredu).
Nech sú dané dve rôznobežné priamky určujúce smery.

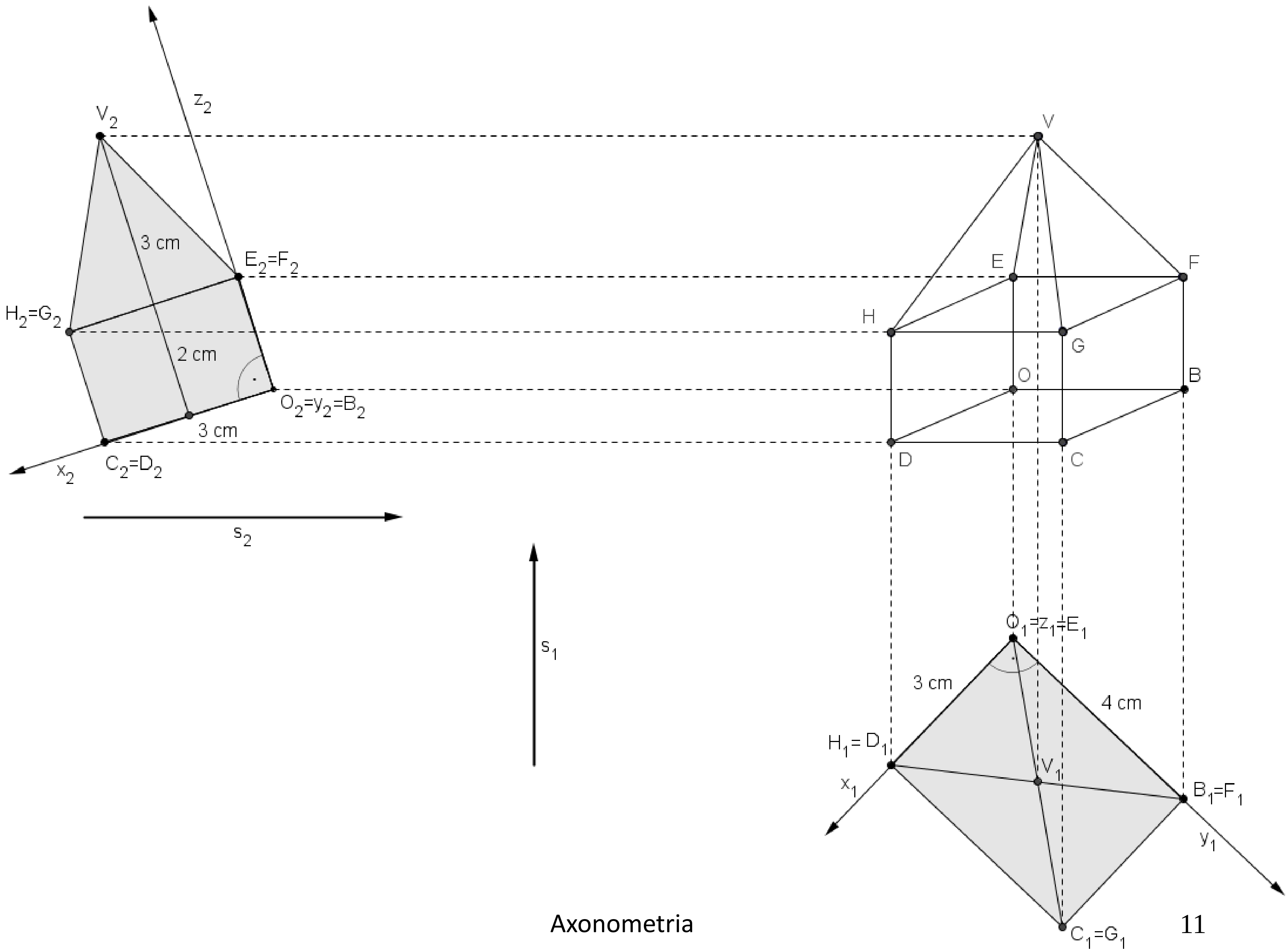
Axonometrický priemet útvaru môžeme zostrojiť tak, že prvým priemetom daného bodu urobíme rovnobežku s jedným smerom a druhým priemetom daného bodu rovnobežku s druhým smerom.

Priesečníkom uvedených priamok je axonometrický priemet daného bodu.

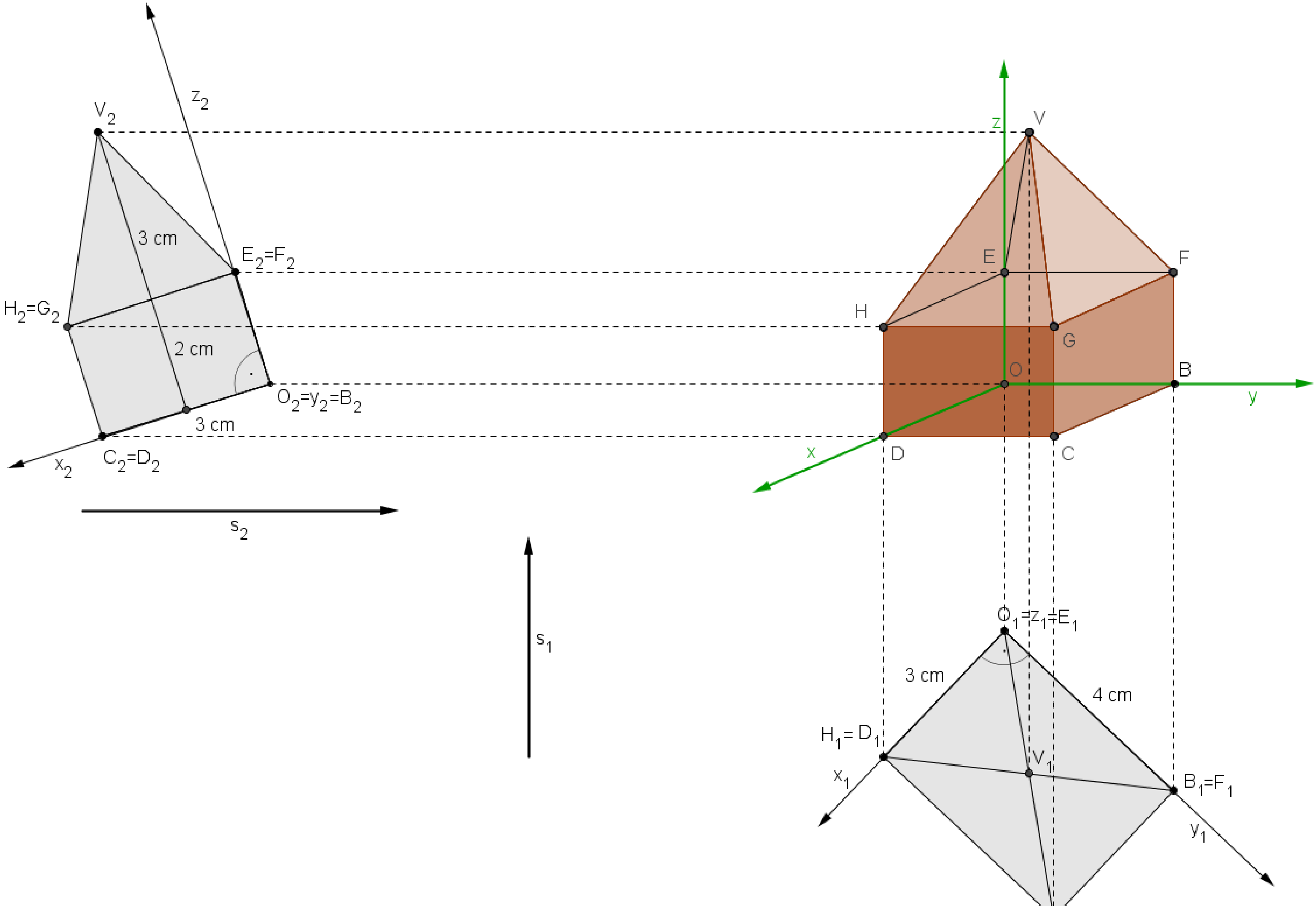
Príklad. Nech je daný prvý a druhý priemet útvaru, zvislý smer a vodorovný smer. Zostrojte axonometrický priemet útvaru.

[Zárezová metóda]


z_2
$O_2=y_2$
x_2
s_2
s_1
$O_1=z_1$
x_1
y_1



z_2
V_2
3 cm
$E_2=F_2$
$H_2=G_2$
2 cm
$O_2=y_2=B_2$
3 cm
x_2
$C_2=D_2$
s_2
s_1
V
E
F
H
G
O
B
D
C
$O_1=z_1=E_1$
3 cm
4 cm
$H_1=D_1$
V_1
x_1
$B_1=F_1$
y_1
$C_1=G_1$


z_2
V_2
3 cm
$E_2=F_2$
$H_2=G_2$
2 cm
$O_2=y_2=B_2$
3 cm
x_2
$C_2=D_2$
s_2
s_1
z
V
E
F
H
G
O
B
y
x
D
C
$O_1=z_1=E_1$
3 cm
4 cm
$H_1=D_1$
V_1
$B_1=F_1$
x_1
y_1
$C_1=G_1$

Kolmá axonometria

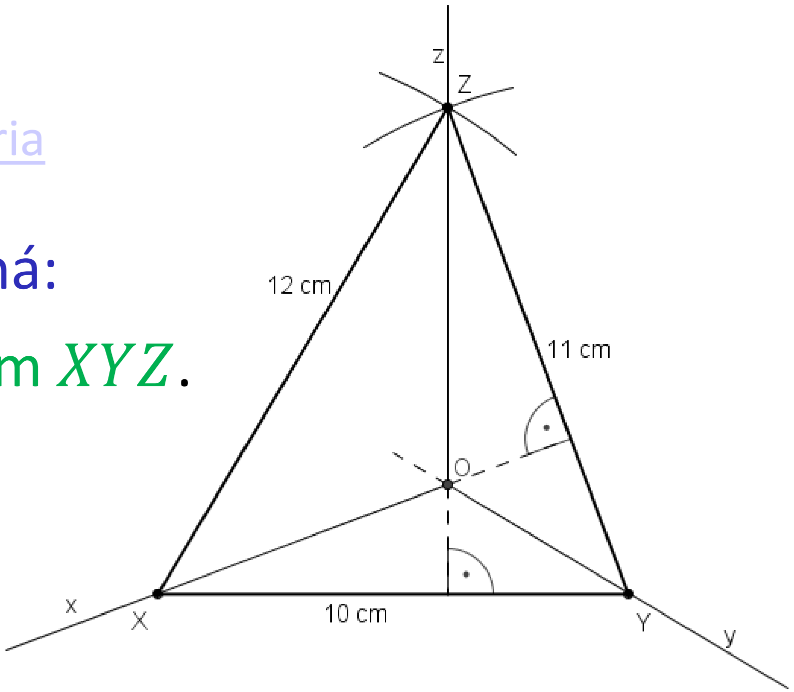
- Smer premietania je kolmý na axonometrickú priemetňu.
- Axonometrická priemetňa pretína súradnicové osi x, y, z v bodoch X, Y, Z, ktoré vytvárajú axonometrický trojuholník, ktorý je ostrouhlý.
- Súradnicové osi sa premietnu do výšok axonometrického trojuholníka.

[Kolmá axonometria]

Kolmá axonometria (KA) je určená:

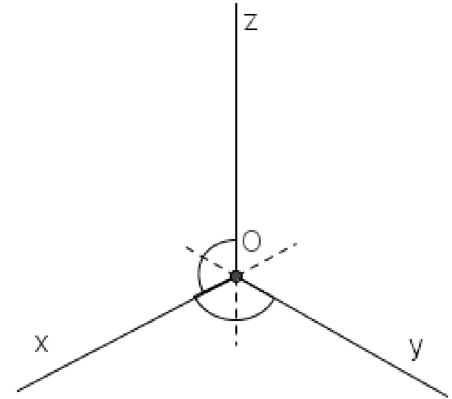
a) axonometrickým trojuholníkom XYZ.

Napr. $KA(10{,}11{,}12)$, t.j.
$|XY| = 10\ cm, |YZ| = 11\ cm,$
$|XZ| = 12\ cm.$



b) axonometrickým osovým krížom.

Napr. uhlami medzi osami z, x a x, y, prípadne ľubovoľným axonometrickým krížom.

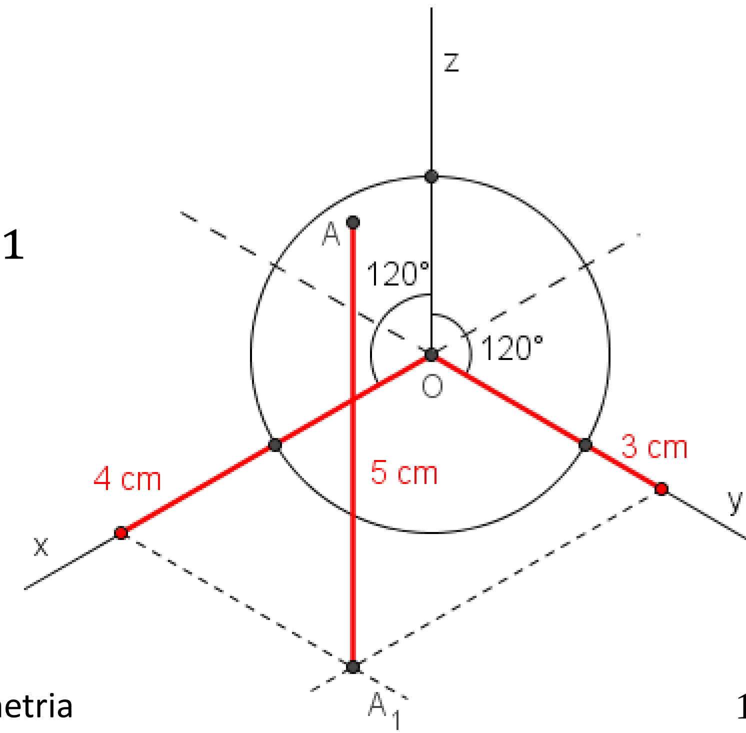


Izometria - osi zvierajú 120° uhly (t.j. axonometrický trojuholník je rovnostranný a jednotky na osiach sú rovnaké).

Príklad. V izometrii zostrojte obraz bodu $A[4,3,5]$, t.j. prvý axonometrický priemet - A_1 a axonometrický priemet - A.

Izometria obraz bodu

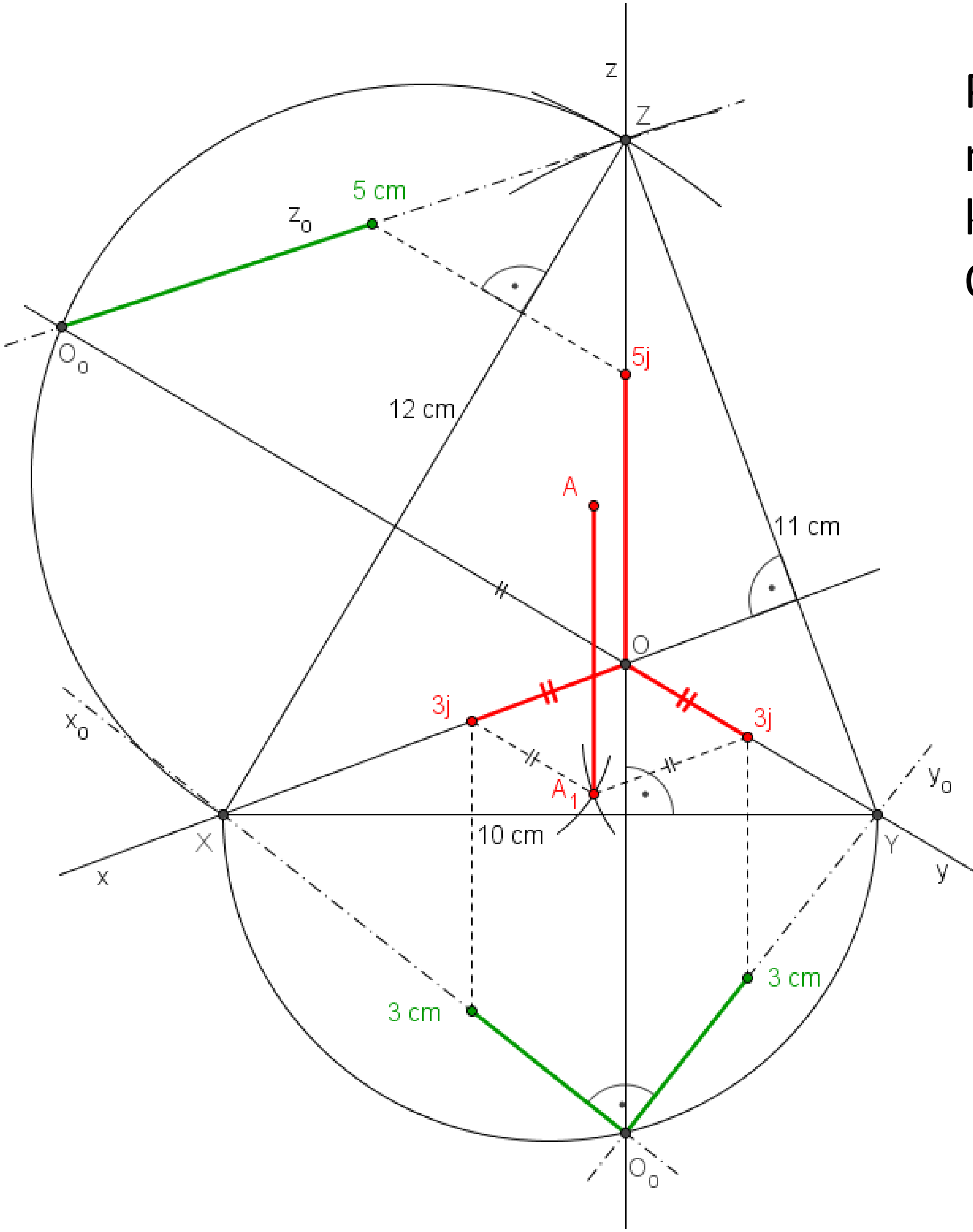
Súradnice nanášame v skutočnej veľkosti, t.j. v cm.



Obraz bodu vo všeobecnej kolmej axonometrii

Príklad. Zostrojte obraz bodu $A[3,3,5]$ v $KA(10,11,12)$.

1. Axonometrický trojuholník XYZ, osi x, y, z, priesečník O.
2. O_{o} - otočená poloha bodu O pri otočení pôdorysne do axonometrickej priemetne okolo priamky XY,
   x_o, y_o - otočené polohy osí x, y.
3. O_{o} - otočená poloha bodu O pri otočení nárysne do axonometrickej priemetne okolo priamky XZ,
   z_o - otočená poloha osi z.
4. Na osi x_o, y_o nanesieme od bodu O_{o} súradnice bodu A a „redukujeme“, $3\ cm \to 3j$ na osi x a $3\ cm \to 3j$ na osi y.
5. Doplníme na rovnobežník, A_1- prvý axonometrický priemet bodu A.
6. Obdobne „redukujeme“ *z*-ovú súradnicu $(5\ cm \to 5j)$ a nanesieme ju od bodu A_1 na rovnobežku s osou *z.*
   A - axonometrický priemet bodu A.



Poznámka. Kladné súradnice x, y nanášame od bodu O_0 smerom k bodom X, Y.
Obdobne *z*-ovú súradnicu.

Poznámka. Pre axonometrický trojuholník je dôležitý pomer dĺžok strán, podobné axonometrické trojuholníky dávajú rovnaké jednotky na axonometrických priemetoch osí.

[KA jednotky]

[KA obraz bodu]

Obraz priamky v axonometrii, stopníky priamky

Obraz priamky je určený usporiadanou dvojicou axonometrických priemetov, najčastejšie $a(a, a_1)$.

Niektorým priemetom priamky môže byť aj bod.

Stopník priamky je priesečník priamky s priemetňou.

Pôdorysný stopník P je priesečník priamky s pôdorysňou, $P(P, P_1 = P)$.

Nárysný stopník N je priesečník priamky s nárysňou, $N(N, N_1), N_1 \in x$.

Bokorysný stopník M je priesečník priamky s bokorysňou, $M(M, M_1), M_1 \in y$.

Príklad. Je daná priamka $a = AB, A[3,-1,6], B[1,2,3]$. Zostrojte jej stopníky a) graficky v izometrii, b) numericky.

KA stopníky

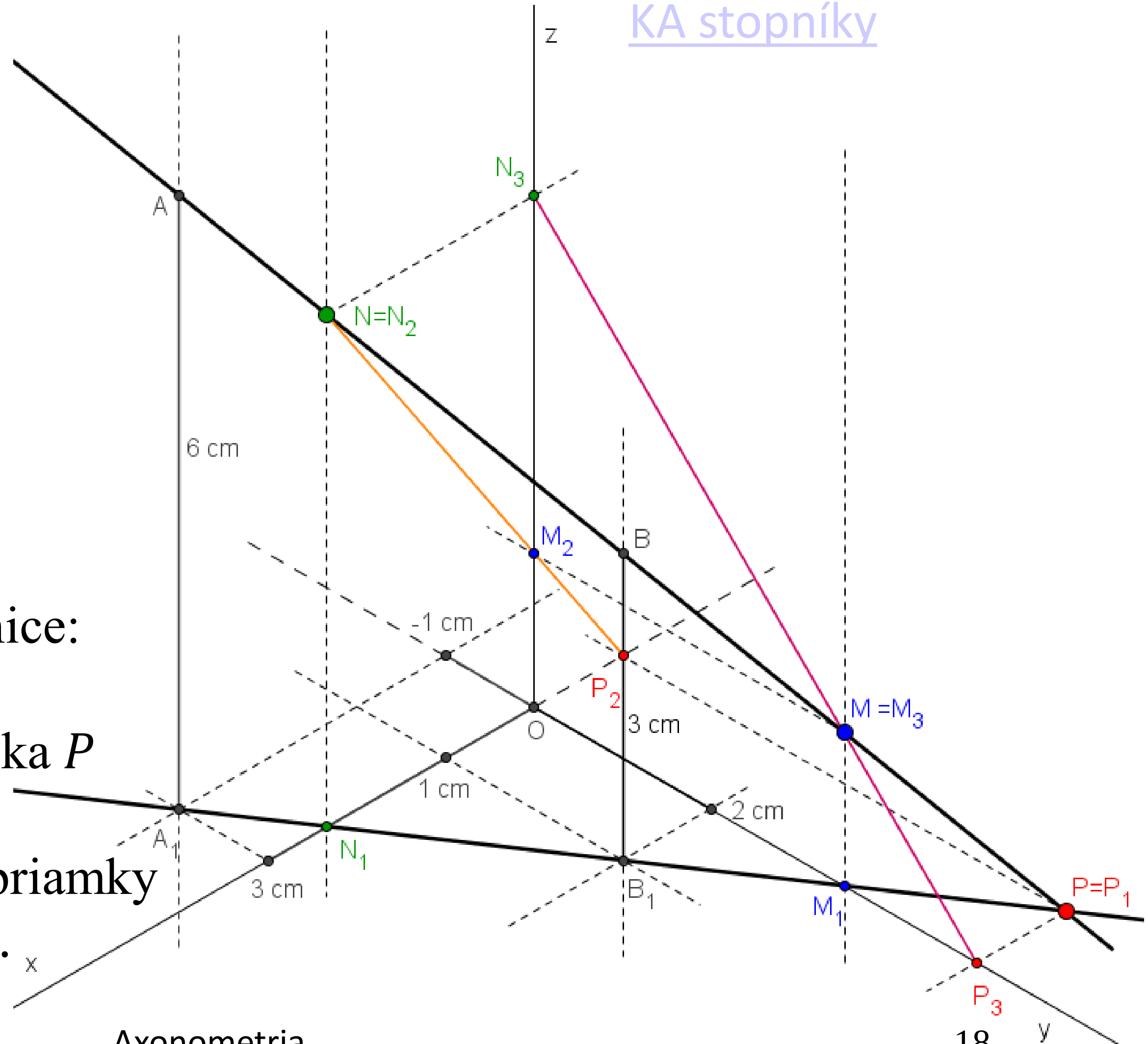
a) P: $a \cap a_1 = P = P_1$

N: $a_1 \cap x = N_1 \dots \parallel z$

$\rightarrow N \in a$

M: $a_1 \cap y = M_1 \dots \parallel z$

$\rightarrow M \in a$



b) Zostavíme parametrické rovnice priamky AB:

$x = 3 - 2t, y = -1 + 3t,$

$z = 6 - 3t.$

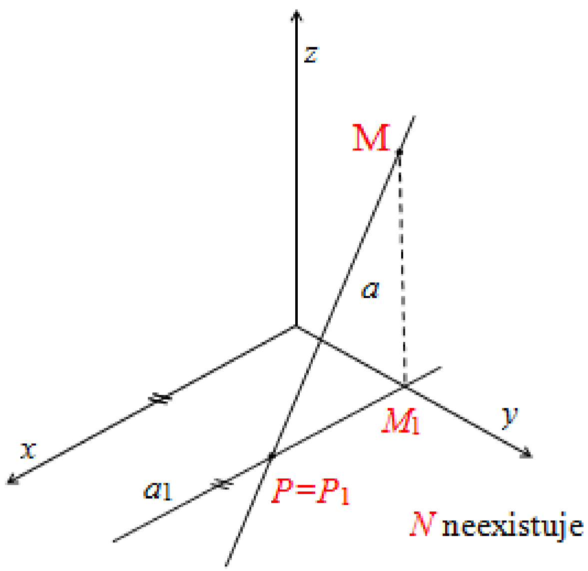
Súradnicové roviny majú rovnice:

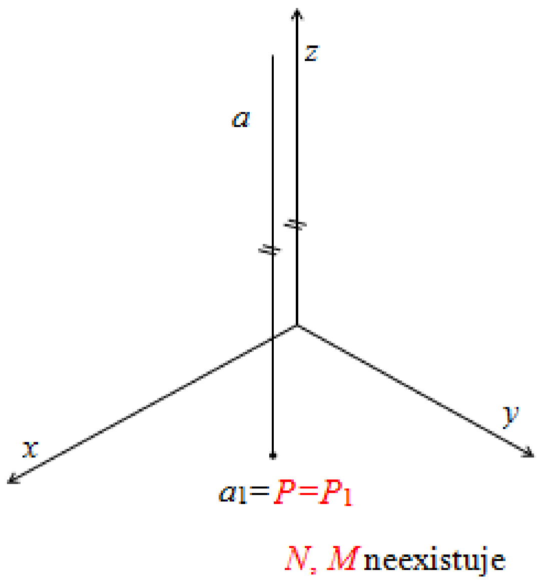
$\pi: z = 0, \nu: y = 0, \mu: x = 0.$

Súradnice pôdorysného stopníka P dostaneme riešením systému rovníc: parametrické rovnice priamky a rovnice $z = 0 \rightarrow P[-1,5,0]$.

Obdobne $N\left[\frac{7}{3}, 0, 5\right], M\left[0, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Stopníky priamok





Poznámka. Niektorý stopník aj nemusí existovať alebo je ich nekonečne veľa.

V priestore dve priamky môžu byť: rovnobežné, rôznobežné alebo mimobežné.

Rovina, stopy roviny

Rovina je v priestore určená:

- troma nekolineárnymi bodmi
- dvomi rovnobežnými priamkami
- dvomi rôznobežnými priamkami
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží.

Axonometrickým priemetom roviny je vo všeobecnosti celá axonometrická priemetňa, iba ak rovina je kolmá na axonometrickú priemetňu, tak jej priemetom je priamka.

Rovinu budeme zobrazovať pomocou stôp.

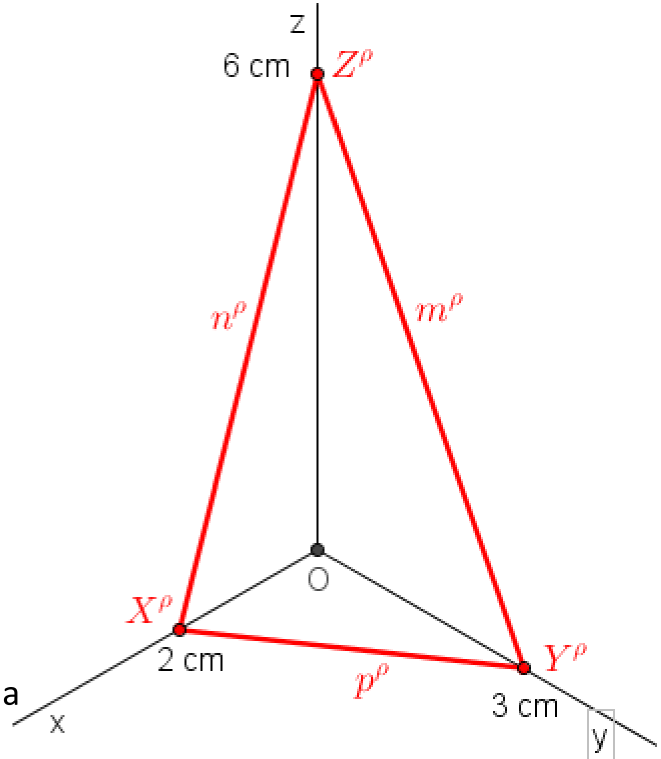
Stopa roviny je priesečnica roviny s priemetňou.

Pôdorysná stopa p^{ρ} je priesečnica roviny s pôdorysňou,
$p^{\rho}\left(p^{\rho}, {p^{\rho}}_{1} = p^{\rho}\right)$.

Nárysná stopa n^{ρ} je priesečnica roviny s nárysňou,
$n^{\rho}(n^{\rho}, {n^{\rho}}_{1} = x)$.

Bokorysná stopa m^{ρ} je priesečnica roviny s bokorysňou,
$m^{\rho}(m^{\rho}, {m^{\rho}}_{1} = y)$.

Príklad. V izometrii zostrojte stopy roviny ρ, ktorá je daná všeobecnou (implicitnou) rovnicou $3x + 2y + z - 6 = 0$.



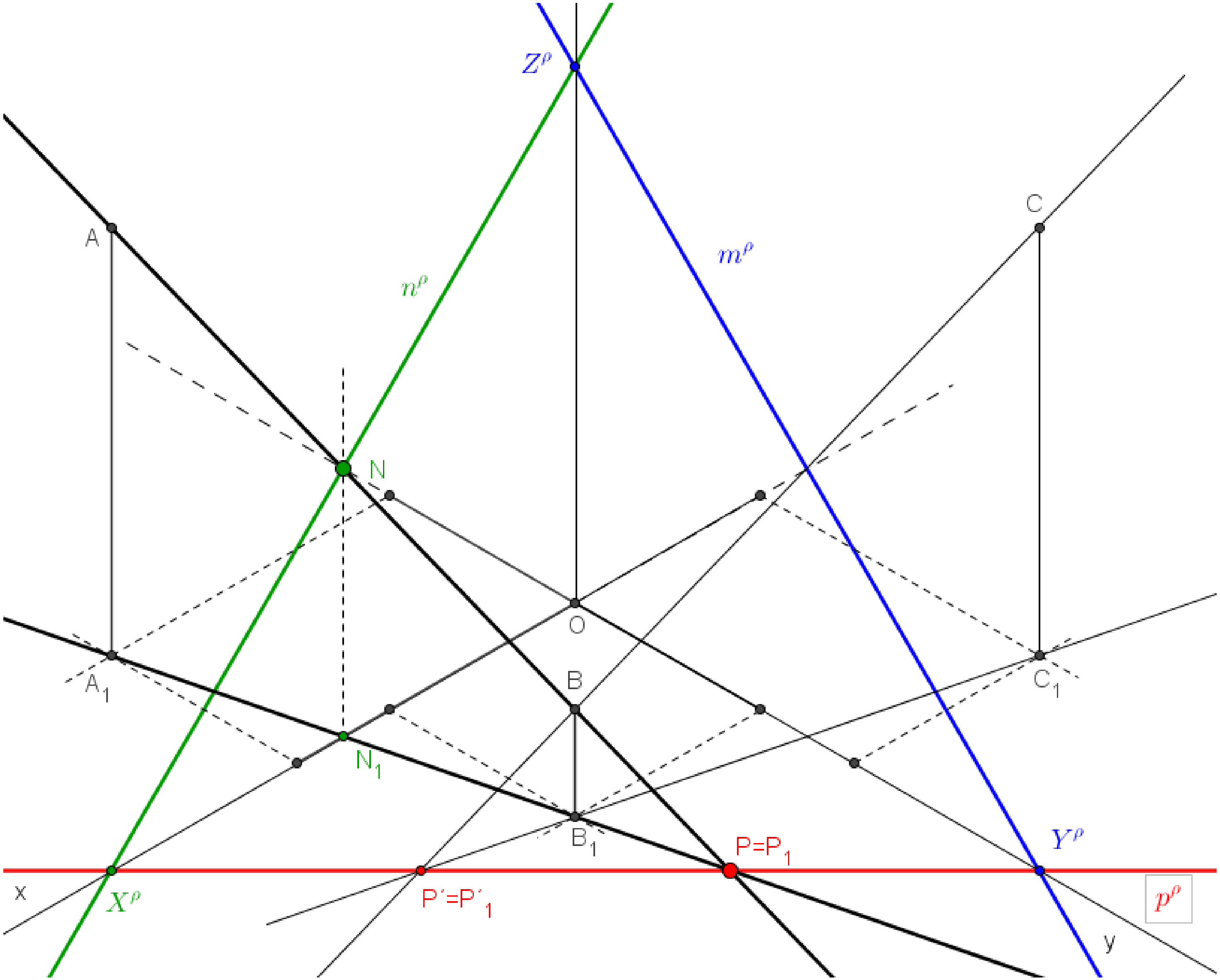
Veta. Ak priamka leží v rovine, stopníky má na príslušných stopách roviny.

Príklad. Axonometria je daná ľubovoľným axonometrickým osovým krížom. Rovina ρ je určená tromi nekolineárnymi bodmi $A, B\ C$, ktoré sú dané svojimi axonometrickými a prvými axonometrickými priemetmi $A(A, A_1), B(B, B_1), C(C, C_1)$. Zostrojte stopy roviny ρ.

KA stopy

Stopy roviny zostrojíme ako spojnice príslušných stopníkov dvoch priamok roviny: $p^\rho = PP', n^\rho = NN', m^\rho = MM'$.

Nie je nutné zostrojiť všetky stopníky, využijeme poznatok, že $p^\rho \cap n^\rho = X^\rho,\ \ p^\rho \cap m^\rho = Y^\rho,\ \ n^\rho \cap m^\rho = Z^\rho$.


Z^ρ
A
C
n^ρ
m^ρ
N
O
A_1
B
C_1
N_1
B_1
$P=P_1$
Y^ρ
x
X^ρ
$P'=P'_1$
p^ρ
y

Dve roviny v priestore môžu byť:

- rovnobežné (príslušné stopy sú rovnobežné),
- rôznobežné (existuje spoločná priamka – priesečnica).

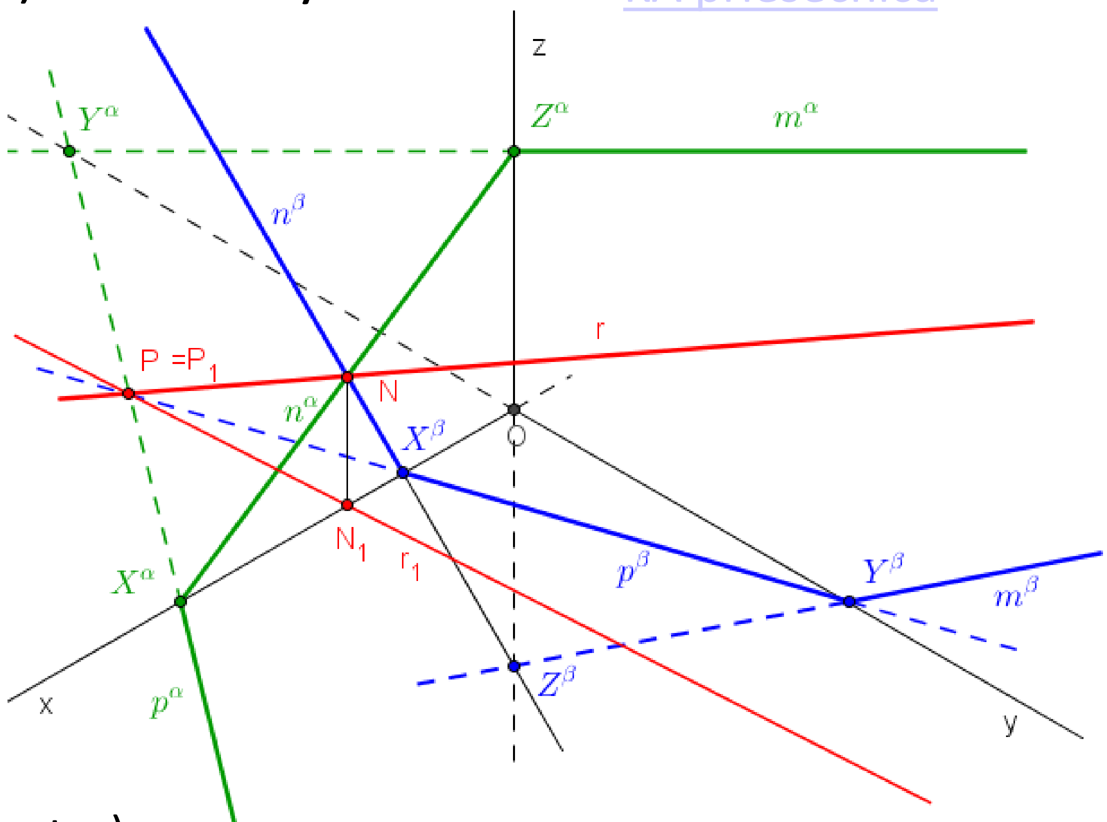
Priesečnica dvoch rovín

Príklad. Zostrojte priesečnicu rovín

$\alpha: 4x - 3y + 6z - 12 = 0$ a $\beta: 6x + 2y - 3z - 6 = 0$

a) graficky v izometrii, b) numericky.

KA priesečnica



a) Hľadáme priesečníky príslušných stôp:

$p^\alpha \cap p^\beta = P = P_1$,

$n^\alpha \cap n^\beta = N \rightarrow N_1 \in x$.

Priesečnica r je určená

$PN = r$, $P_1 N_1 = r_1$.

b) Numericky riešime sústavu dvoch rovníc o troch neznámych:

$4x - 3y + 6z - 12 = 0$

$6x + 2y - 3z - 6 = 0$.

Ak volíme, napr. $x = t$ (parameter),

dostaneme parametrické vyjadrenie priesečnice $x = t, y = 24 - 16t, z = \frac{42-26t}{3}$.

Priamka a rovina

- priamka leží v rovine,
- priamka je rovnobežná s rovinou,
- priamka je rôznobežná s rovinou (existuje spoločný jeden bod – priesečník).

Priesečník priamky s rovinou

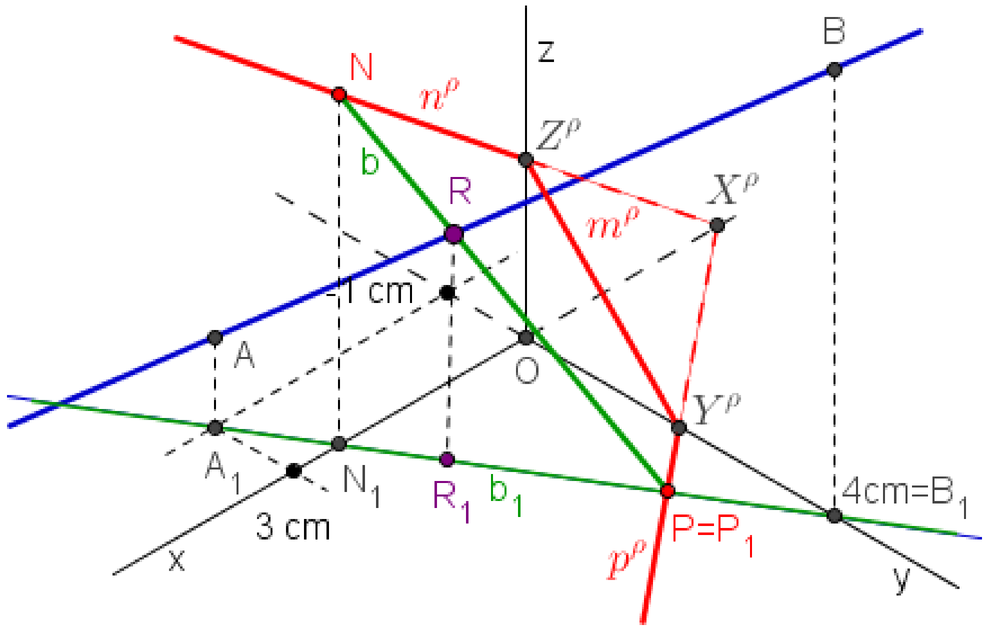
Príklad. Zostrojte priesečník priamky $AB: x = 3 - 3t,$ $y = -1 + 5t,\ z = 1 + 4t$ s rovinou $\rho: 4x - 5y - 5z + 10 = 0.$
a) graficky v izometrii, b) numericky.

KA priesečník

a) Súradnice bodu A dostaneme dosadením $t = 0$ do parametrického vyjadrenia priamky: $A[3, -1,1]$, obdobne vypočítame súradnice bodu $B[0,4,5]$ pre $t = 1$.

Priesečník R priamky AB a roviny ρ budeme hľadať metódou krycej priamky b, ktorá bude ležať v rovine ρ a jej prvý priemet stotožníme s prvým priemetom A_1B_1 danej priamky AB.

1. $b: b \subset \rho, b_1 = A_1B_1$
2. $b_1 \cap p^\rho = P = P_1$
3. $b_1 \cap x = N_1 \rightarrow N \in n^\rho$
4. $b = PN$
5. $b \cap AB = R \rightarrow R_1 \in b_1$

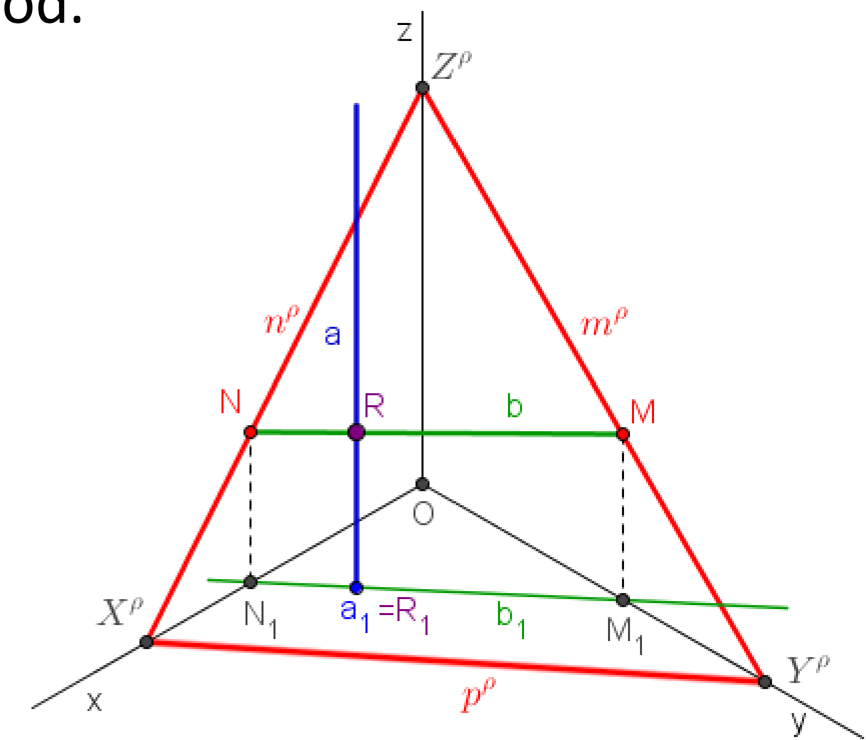


b) Súradnice priesečníka R vypočítame riešením sústavy štyroch rovníc (parametrické rovnice priamky a všeobecná rovnica roviny) dosadzovacou metódou.

$$R\left[\frac{35}{19}, \frac{53}{57}, \frac{145}{57}\right]$$

Príklad. Zostrojte priesečník priamky $a(a, a_1)$, $a \perp \pi$ s rovinou $\rho(p^\rho, n^\rho, m^\rho)$. Prvým axonometrickým priemetom priamky a je bod.

KA priesečník2



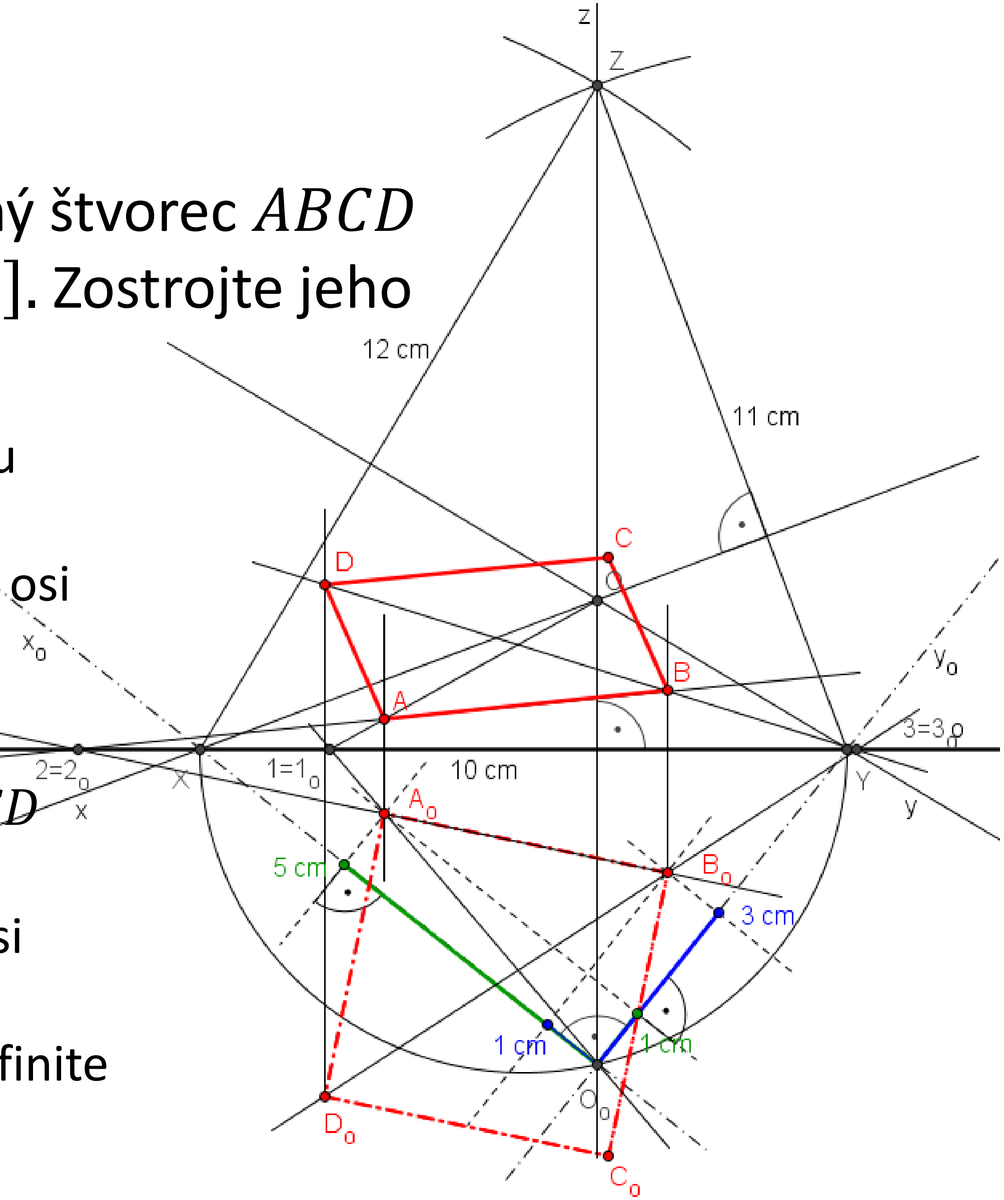
Riešime ako v predchádzajúcom príklade metódou krycej priamky, pričom ale priamku b_1 môžeme voliť ľubovoľne, len musí platiť $a_1 \in b_1$.

Obraz *n*-uholníka v pôdorysni

Príklad. $KA(10{,}11{,}12)$. Je daný štvorec $ABCD$ v pôdorysni, $A[5{,}1{,}0], B[1{,}3{,}0]$. Zostrojte jeho obraz v kolmej axonometrii.

1. Najprv zostrojíme otočenú polohu zadaných bodov – body A_o, B_o (nanesením príslušných súradníc na osi x_o, y_o a doplnením na obdĺžnik).
2. Štvorec $A_o, B_o\ C_o, D_o$.
3. Obraz štvorca – rovnobežník $ABCD$ zostrojíme pomocou osovej afinity s osou XYa párom odpovedajúcich si bodov $O_o \rightarrow O$.

Poznámka. Obrazy bodov v osovej afinite môžeme hľadať pomocou spájania bodov (napr. O_0A_0) alebo využitím rovnobežky s osou x_0 alebo y_0, ktorej obraz je rovnobežný s x resp. y.



KA obraz štvorca

Obraz kružnice v pôdorysni

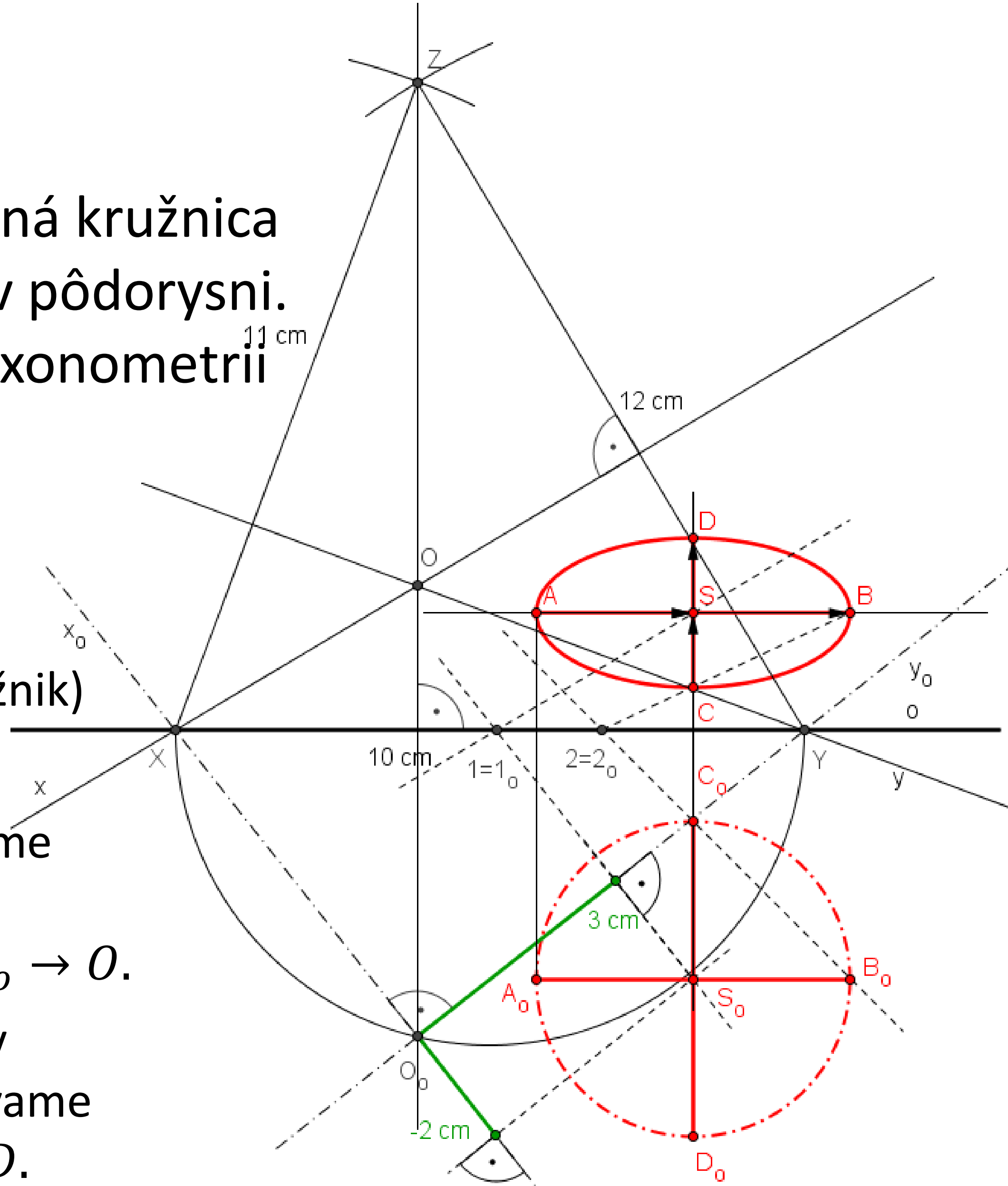
Príklad. $KA(10,12,11)$. Je daná kružnica $k = (S, r = 2{,}5), S[-2{,}3{,}0]$ v pôdorysni. Zostrojte jej obraz v kolmej axonometrii pomocou otočenej polohy.

KA obraz kružnice

1. otočená poloha stredu – S_o (nanesením príslušných súradníc na osi x_o, y_o a doplnením na obdĺžnik) a kružnica k_o.

2. Obraz kružnice – elipsu zostrojíme pomocou osovej afinity s osou XY a párom odpovedajúcich bodov $O_o \to O$.

Zobrazením združených priemerov A_oB_o, C_oD_o, ($A_oB_o \parallel XY$), dostávame hlavnú a vedľajšiu os elipsy AB, CD.



Obraz kružnice v pôdorysni

Príklad. $KA(10,12,11)$. Je daná kružnica $k = (S, r = 3), S[3,3,0]$ v pôdorysni. Zostrojte jej obraz v kolmej axonometrii priamou metódou.

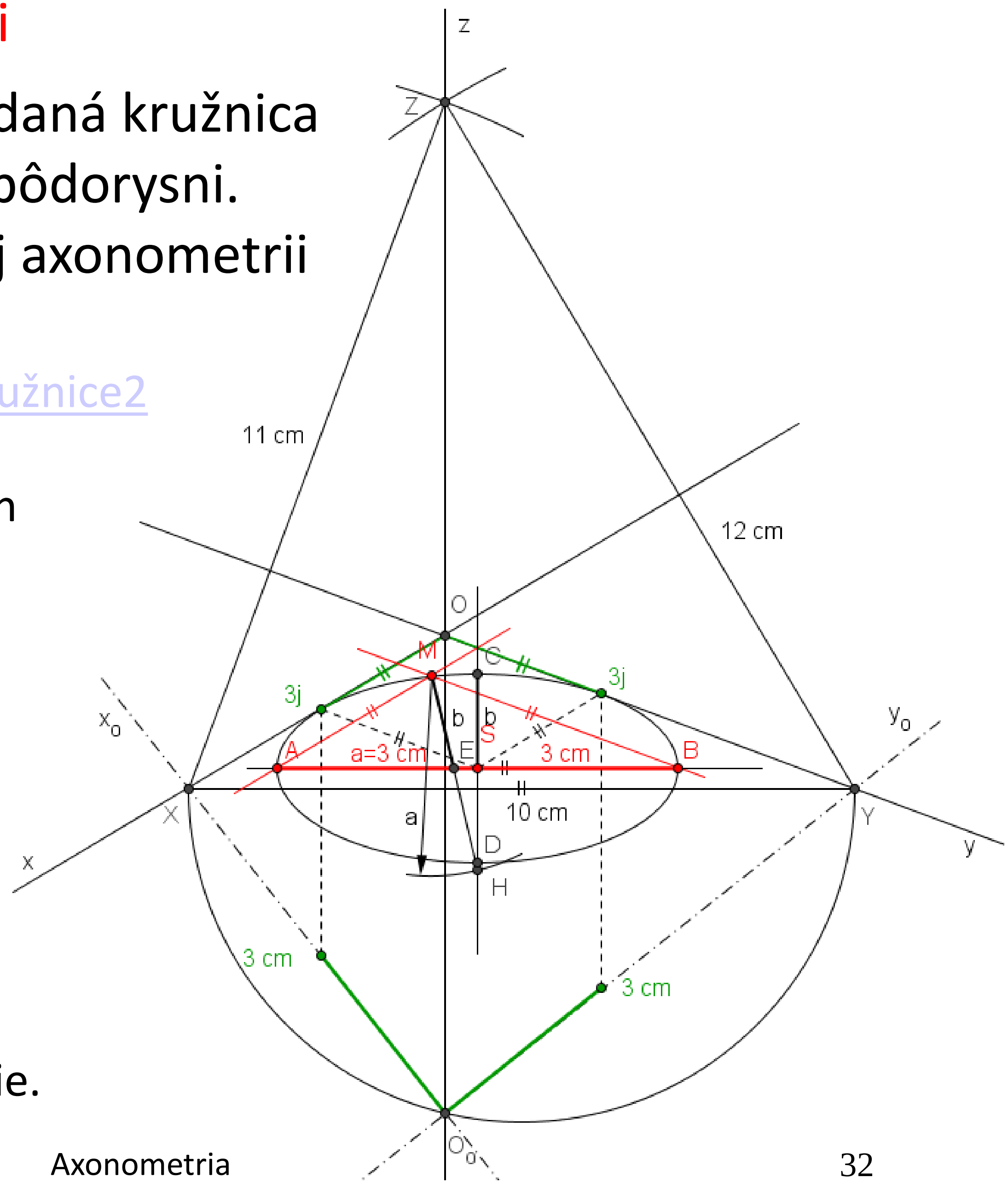
KA obraz kružnice2

1. Zostrojíme stred elipsy S (redukovaním súradníc na osiach $3\ cm \rightarrow 3j, 3\ cm \rightarrow 3j$ a doplnením na rovnobežník).

2. Hlavná os elipsy $AB \parallel XY$, $|AB| = 2r = 6\ cm$.

3. Bod elipsy M dostaneme pomocou rovnobežiek s osami x, y v bodoch A, B.

4. Vedľajšie vrcholy C, D elipsy pomocou Rozdielovej konštrukcie.



Ďakujem za pozornosť.