Krivky (čiary)

Krivku môžeme definovať:

- trajektória (dráha) pohybujúceho sa bodu,
- jednoparametrická sústava bodov charakterizovaná určitou vlastnosťou,...

Krivky môžeme deliť z viacerých hľadísk, napr.:

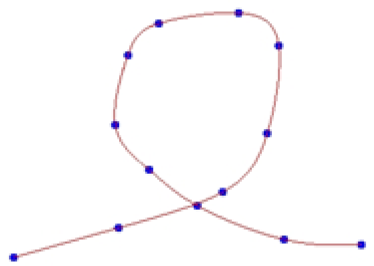
- rovinné (ak všetky body krivky ležia v jednej rovine),
- priestorové.

Iné rozdelenie kriviek:

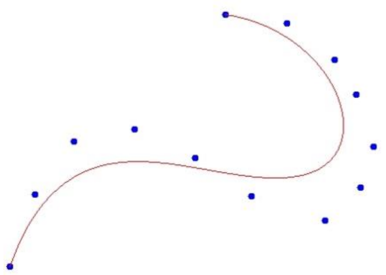
- analytické - dajú sa vyjadriť analytickými funkciami jednej premennej (kužeľosečky, sínusoida, skrutkovica,...),
- empirické - poznáme znázornenie, ale nepoznáme matematické vyjadrenie (vrstevnice na mape, izotermy,...),
- krivky určené postupnosťou bodov.

Krivky určené postupnosťou bodov

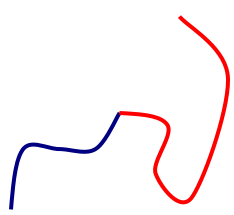
- interpolačné (krivka prechádza všetkými bodmi),



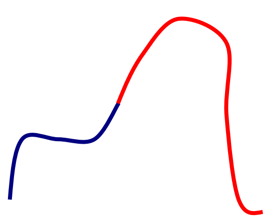
- aproximačné (krivka sa iba riadi bodmi, nemusí nimi prechádzať).



Spájanie kriviek:

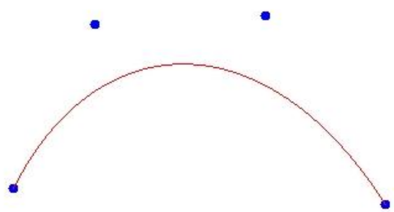


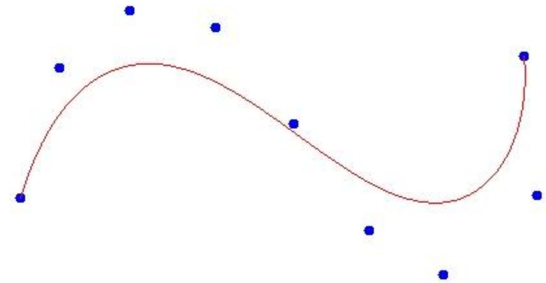
iba nadväzujú na seba,



v spoločnom bode tá istá dotyčnica,...

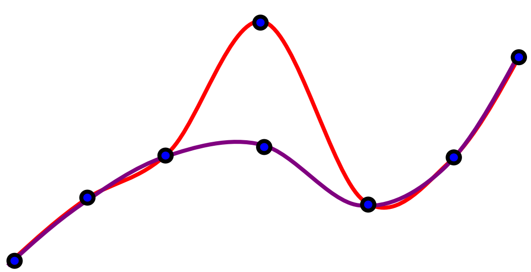
Medzi najznámejšie aproximačné krivky patria Bézierove krivky.



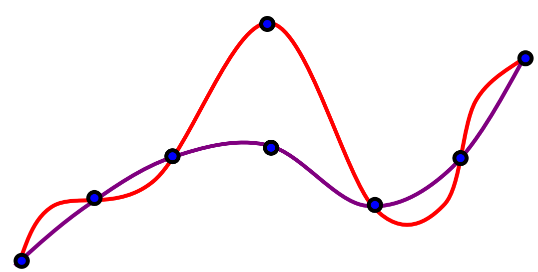


Pri modelovaní počítačom sa používajú ďalšie aproximačné krivky: Coonsove kubiky, *b*- spline krivky, NURBS krivky,...

Zmena polohy jedného bodu môže spôsobiť:

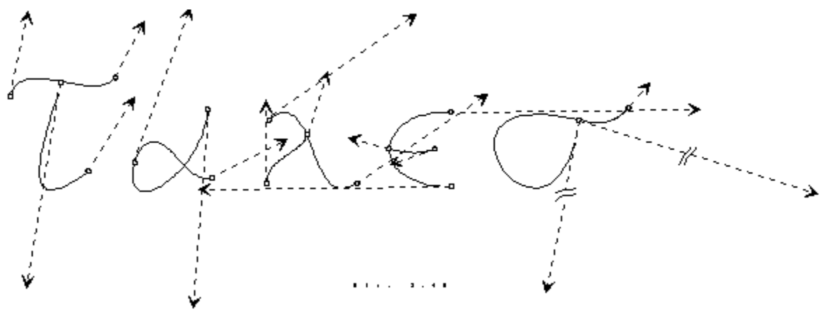


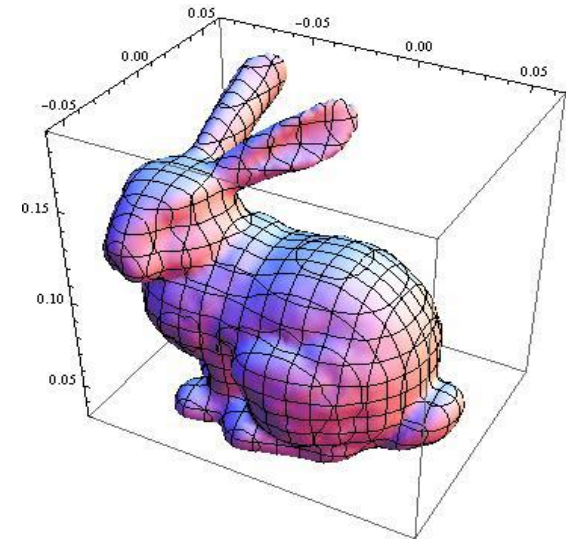
lokálnu zmenu tvaru krivky

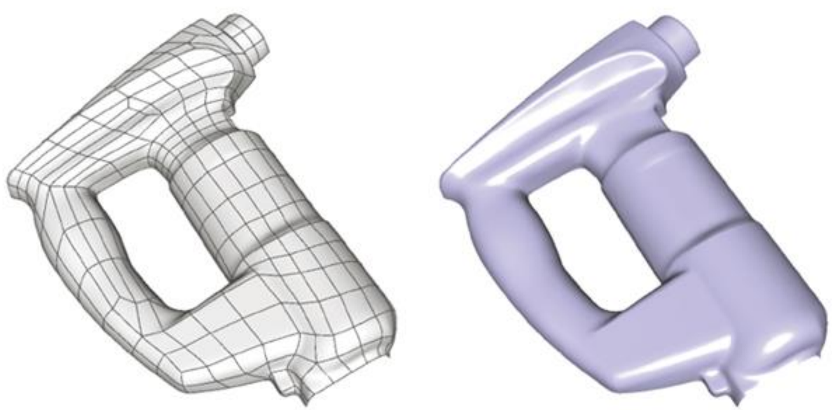


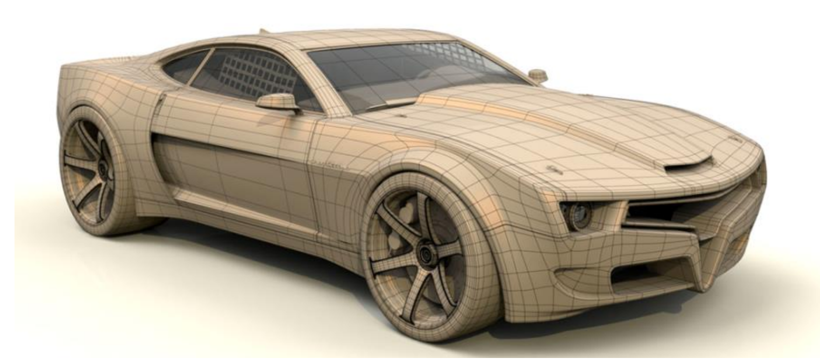
globálnu zmenu tvaru krivky

Príklady použitia:









Analytické vyjadrenie rovinných kriviek

(v rovine je daná karteziánska súradnicová sústava):

- parametrické rovnice krivky: $x = x(t), y = y(t), t \in I,$ kde

$x(t), y(t)$, sú funkcie premennej t, definované na intervale I a majúce derivácie všetkých rádov.

Tieto rovnice sú ekvivalentné s vektorovou rovnicou $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

Ak parametrické rovnice majú tvar $x = t, y = y(t), t \in I,$ tak krivka je určená jedinou rovnicou:

- explicitná rovnica krivky: $y = f(x), x \in I,$ t.j. krivka je

grafom funkcie.

Vylúčením parametra z parametrických rovníc dostávame:

- implicitnú rovnicu krivky $F(x, y) = 0.$

- vyjadrenie krivky v polárnych súradniciach: $\rho = f(\varphi), \varphi \in I.$

Ak karteziánska a polárna súradnicová sústava sú pridružené, tak z vyjadrenia krivky v polárnych súradniciach dostaneme parametrické rovnice transformačnými vzťahmi:

$$x = \rho\, cos\varphi, \qquad y = \rho\, sin\varphi,$$

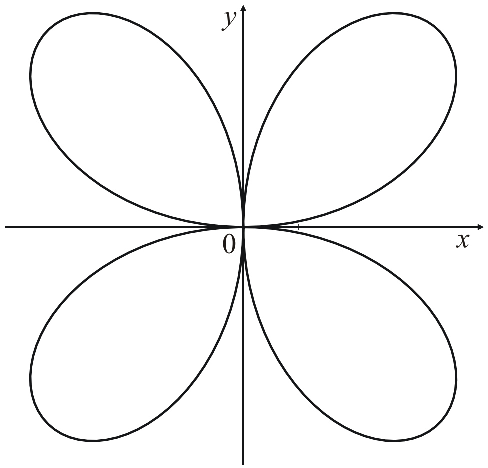
t.j. polárny uhol φ je parametrom.

Príklad. Nájdite vyjadrenie kružnice so stredom $S[0,0]$ a polomerom r v polárnych súradniciach, parametrické rovnice a implicitnú rovnicu.

Príklad. Nájdite parametrické vyjadrenie krivky $2y - x^2 + x^3 + 2 = 0$.

Príklad. Nájdite parametrické vyjadrenie kružnice $x^2 + y^2 = 2ay, a =$ konšt.

Príklad. Úsečka dĺžky $2a$ sa pohybuje tak, že jej koncové body sa nachádzajú na súradnicových osiach. Nájdite rovnice dráhy päty kolmice zostrojenej zo začiatku O na danú úsečku (štvorlístková ružica).

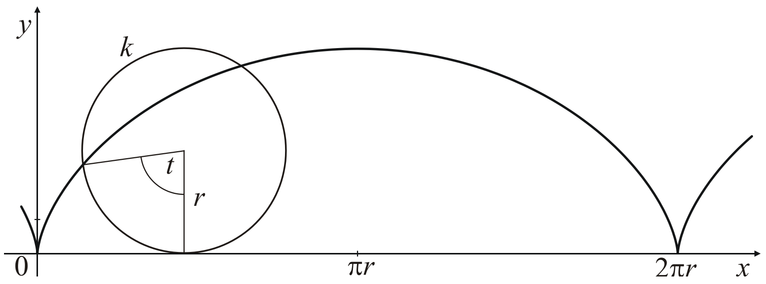


Príklad. Nájdite implicitnú rovnicu krivky, ktorá je určená parametrickými rovnicami $x = \frac{a}{\cos t}, y = b\, tg\ t, t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, a, b sú konštanty.

Príklad. Nájdite implicitnú rovnicu krivky, ktorá je určená parametrickými rovnicami $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty), a, b$ sú konštanty.

Niektoré technické čiary

Cykloida je čiara, ktorú vytvára bod kružnice pri jej kotúľaní po priamke alebo kružnici.
Ortocykloida je dráha (trajektória) bodu kružnice pri jej kotúľaní po priamke.

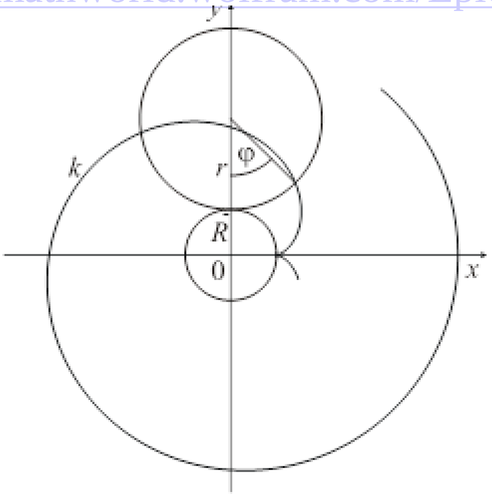


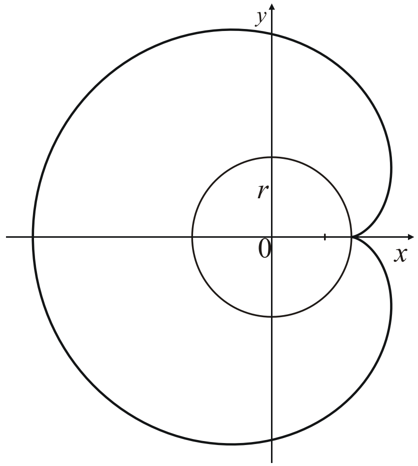
http://mathworld.wolfram.com/notebooks/PlaneCurves/Cycloid.nb

Brachystochrona (označovaná tiež ako krivka najkratšieho spádu) je krivka spájajúca dva body, po ktorej sa hmotný bod dostane z jedného bodu do druhého pôsobením homogénneho gravitačného poľa za najkratší čas. Brachystochrona predstavuje vždy časť oblúka cykloidy.

Epicykloida je dráha bodu pohybujúcej sa kružnice pri jej kotúľaní zvonku po inej pevnej kružnici.

http://mathworld.wolfram.com/Epicycloid.html

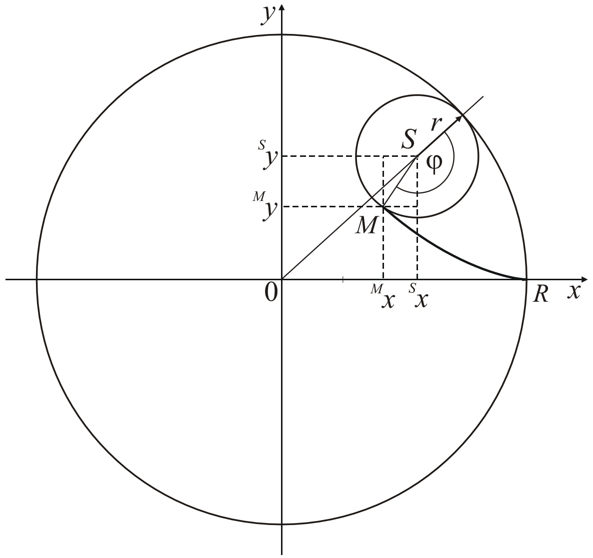


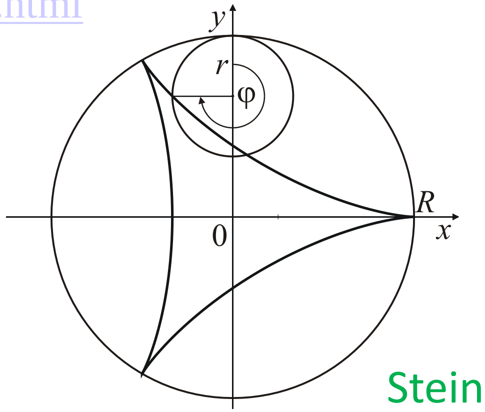


srdcovka (kardioida) $(r = R)$

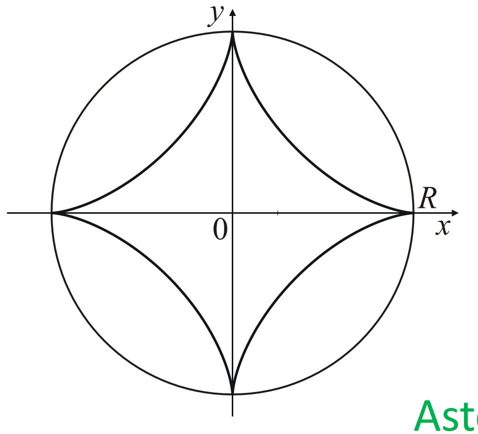
Hypocykloida je dráha bodu pohybujúcej sa kružnice pri jej kotúľaní zvnútra po inej pevnej kružnici.

http://mathworld.wolfram.com/Hypocycloid.html



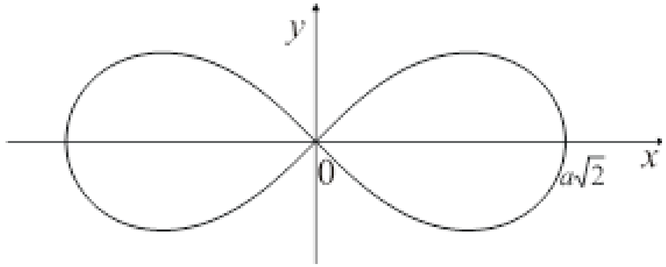


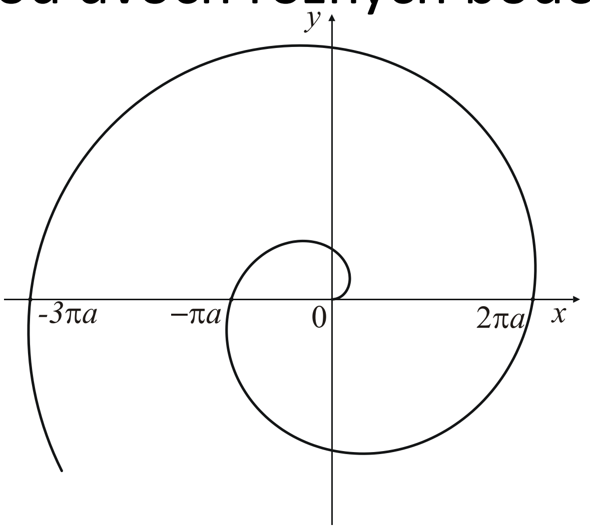
Steinerova krivka $\left(r = \frac{R}{3}\right)$



Asteroida $\left(r = \frac{R}{4}\right)$

Bernoulliho lemniskáta je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnaký súčin vzdialeností od dvoch rôznych bodov roviny.

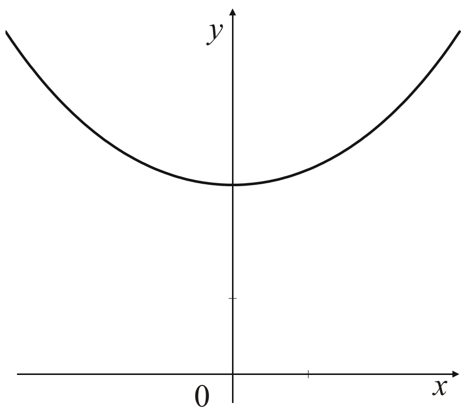




Archimedova špirála je krivka, ktorú opisuje bod pohybujúci sa konštantnou rýchlosťou po lúči, ktorý sa otáča okolo pólu konštantnou uhlovou rýchlosťou.

Reťazovka je krivka, ktorá vznikne, keď ohybnú hmotnú neroztiahnuteľnú niť upevníme v dvoch bodoch.

Prevrátená reťazovka je ideálny tvar pre oblúky a klenby, ktoré stoja iba svojou váhou.



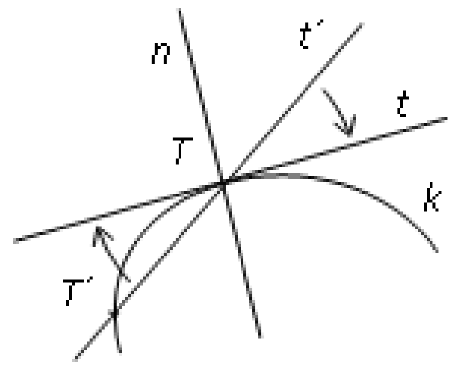
Dotyčnica a normála krivky

Nech je daná krivka k a na nej ľubovoľný bod T.

Sečnica (sekanta) krivky je spojnica dvoch rôznych bodov krivky, napr. TT'.

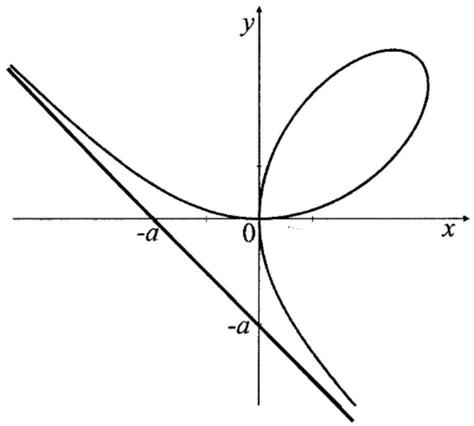
Dotyčnica (tangenta) t krivky k v bode T je limitnou polohou (ak existuje taká jediná) sečnice $t' = TT'$ pri konvergencii $T' \to T$.

Normála n je priamka, ktorá prechádza dotykovým bodom T a je kolmá na dotyčnicu t.

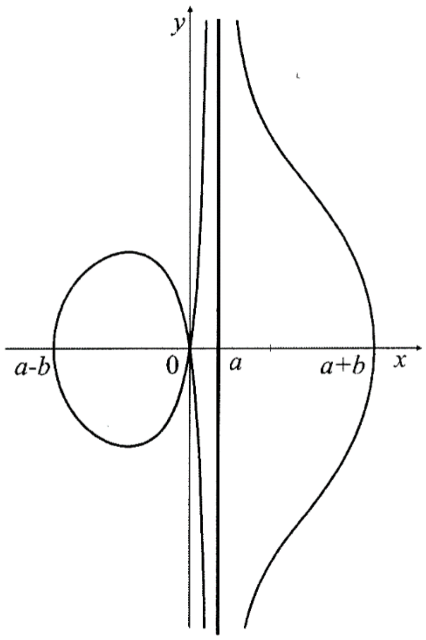


Ak dve krivky majú v spoločnom bode spoločnú dotyčnicu, hovoríme, že sa dotýkajú. Ak sú dotyčnice kriviek v ich spoločnom bode rôzne, krivky sa pretínajú. Uhlom kriviek v spoločnom bode rozumieme uhol ich dotyčníc.

Asymptota krivky je vlastná dotyčnica v nevlastnom bode krivky.



Descartov list

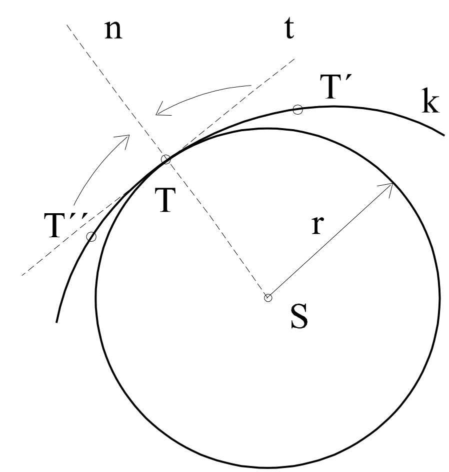


Nikomedova konchoida

Evolúta krivky

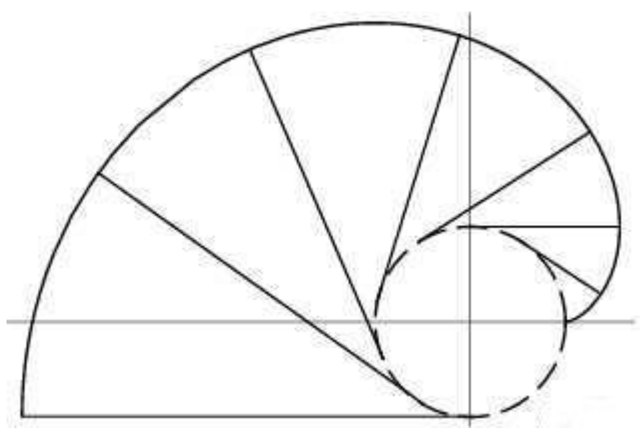
Nech je daná krivka k a na nej bod T. Zvoľme na krivke ďalšie body T', T''.

Oskulačná kružnica krivky k v bode T je limitnou polohou kružnice prechádzajúcej troma bodmi T, T', T'' krivky k pre $T' \to T$, $T'' \to T$.
Oskulačná kružnica má stred na normále zostrojenej v bode T.

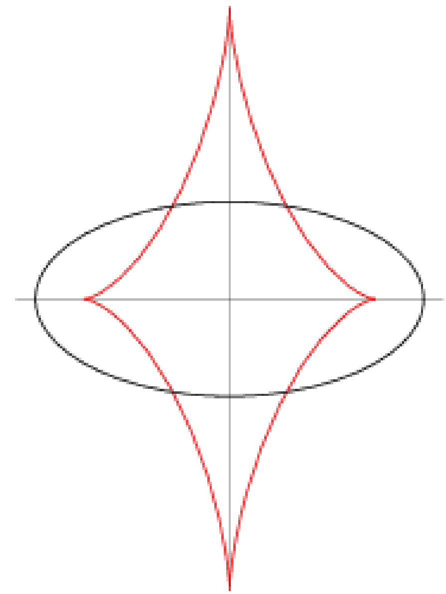


Stred oskulačnej kružnice sa nazýva stred krivosti a jej polomer polomer krivosti krivky k v bode T. Číslo κ, ktoré sa rovná prevrátenej hodnote polomeru, sa nazýva krivosť krivky k v bode T.

Množinu stredov krivosti všetkých bodov krivky k nazývame evolútou krivky $k.$
Ak krivka h je evolútou krivky k, tak krivku k nazývame evolventou krivky $h.$
Dotyčnica evolúty je normálou evolventy.
Príslušný stred krivosti je dotykovým bodom na normále.



kužnica a evolventa kružnice



elipsa a evolúta elipsy

Ďakujem za pozornosť.