

Úlohy – cvičenia z geometrie
(Úlohy označené * sú len doplnkové.)

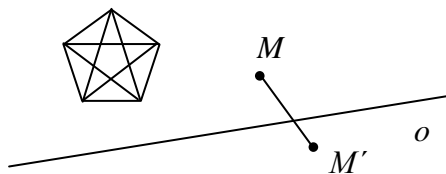
Kuželosečky

1. Elipsa je daná ohniskami $F[0,1]$, $G[4,1]$ a úsečkou $A'B'$ s dĺžkou $2a = 6$. Zostrojte vrcholy a 8 ďalších bodov elipsy! (bodová konštrukcia)
2. (Rozdielová konštrukcia) Elipsa je daná hlavným vrcholom A , stredom S a bodom M elipsy $A[0;0]$, $S[2,5;0]$, $M[4; 1,5]$. Zostrojte vedľajšie vrcholy a hyperoskulačnými kružnicami elipsu vykreslite!
3. Elipsa je daná dvomi združenými priermi EF, GH $E[-3, -2]$, $H[2, -1]$, $S[0,0]$. Zostrojte vrcholy elipsy! (Rytzova konštrukcia)
4. Elipsa je daná dvomi združenými priermi EF, GH $E[4, 3]$, $G[0, -3]$, $H[5,0]$. Zostrojte vrcholy elipsy! (Rytzova konštrukcia)
5. Napíšte parametrické rovnice elipsy, ak $S[-1,2]$, dĺžka hlavnej poloosi je 4 a dĺžka vedľajšej poloosi je 2 (hlavná os je rovnobežná s osou x).
6. Napíšte všeobecnú rovnicu elipsy, ak $S[1, -1]$, dĺžka hlavnej poloosi je 3 a ohnisková vzdialenosť je 2 (hlavná os je rovnobežná s osou x).
7. Napíšte parametrické rovnice kružnice, ak $S[-2,0]$, $r = 2$.
8. Napíšte všeobecnú rovnicu kružnice, ak $S[-1, -2]$, $r = 3$.
9. Napíšte všeobecnú rovnicu kružnice, ak $S[-1, -2]$, $A[2,2]$ a A je bod kružnice.
10. Hyperbola je daná ohniskami $F[-1,1]$, $G[4,1]$ a úsečkou $A'B'$ s dĺžkou $2a = 3$. Zostrojte vrcholy, asymptoty, 4 body hyperboly a vykreslite ju!
11. Napíšte všeobecnú rovnicu hyperboly, ak $S[0, -2]$, dĺžka hlavnej poloosi je 4 a dĺžka vedľajšej poloosi je 1 (hlavná os je rovnobežná s osou x).
12. Parabola je daná ohniskom $F[2,1]$ a určujúcou priamkou $d : x = -1$. Zostrojte vrchol, 4 body paraboly a vykreslite ju!
13. Parabola je daná ohniskom $F[0,0]$ a určujúcou priamkou $d : y = 3$. Zostrojte vrchol, 4 body paraboly a vykreslite ju!
14. Zostrojte graf kvadratickej funkcie a) $y = 2x^2 + 10x + 8$, b) $y = -x^2 - 4x - 5$, c) $y = 2x^2 + 3x$.
15. Určte, o akú kuželosečku ide, a aké sú základné jej charakteristiky $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.
16. Určte, o akú kuželosečku ide, a aké sú jej základné charakteristiky $x = 2 \cos t$, $y = 3 + 2 \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
17. Určte, o akú kuželosečku ide, a aké sú základné jej charakteristiky $\frac{x^2}{14} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$.
18. Určte, o akú kuželosečku ide, a aké sú jej základné charakteristiky a) $x^2 + 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$, b) $x^2 - 4x + 2y^2 + 8y + 11 = 0$.

Osová afinita

1. Osová afinita je určená osou $o: x - 6y + 6 = 0$, $M[-5, -2]$, $M'[-5, 3]$. Je daný rovnostranný trojuholník ABC $A[2, 0]$, $B[-3, 2]$, $y^C > y^B$. Zostrojte jeho obraz v osovej afinitě!

2. Osová afinita je daná osou o , bodmi M , M' . Zostrojte obraz päťcípej hviezdy na obrázku v osovej afinitě.



3. Osová afinita je určená osou $o: y = 0$, $M[4, -3]$, $M'[4, 1, 8]$. Je daný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ $A[0, -2]$, $S[-2, -4]$. Zostrojte jeho obraz v osovej afinitě!

4. Osová afinita je určená osou $o: x + 2y + 4 = 0$, $M[4, -1]$, $M'[4, -7]$. Je daný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ $A[-2, 0]$, $S[0, 2]$. Zostrojte jeho obraz v osovej afinitě!

5. Osová afinita je určená osou $o: y = 0$, $M[4, 2]$, $M'[2, 5; -1, 5]$. Je daný štvorec $ABCD$ $A[-1, 1]$, $B[2, 3]$, $y^C > y^B$. Zostrojte jeho obraz v osovej afinitě!

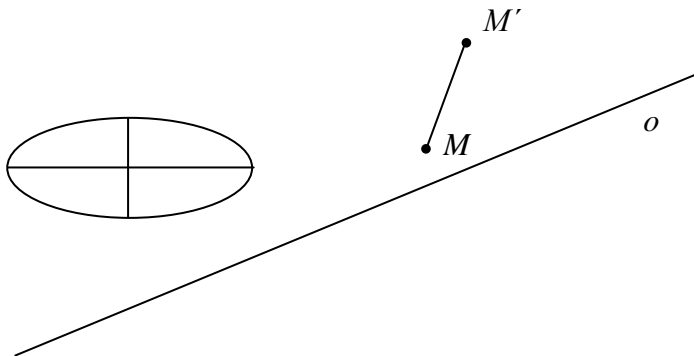
6. Osová afinita je určená osou $o: y = 1$, $M[3, -1]$, $M'[5, 3]$. Je daný štvorec $ABCD$ $A[-4, 1]$, $B[0, 3]$, $y^C > y^B$. Zostrojte jeho obraz v osovej afinitě!

7. Osová afinita je určená osou $o: 2x - 5y + 10 = 0$, $M[-2, 0]$, $M'[-2, 2]$. Je daný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C , $A[0, 2]$, $C[4, 0]$, odvesna $|BC| = 3$ cm, $y^B > y^C$. Zostrojte jeho obraz v osovej afinitě!

8. Osová afinita je určená osou $o: y = 2$, $M[0, 0]$, $M'[0, 3]$. Je daná kružnica $k = (S, r = 3)$, $S[6, -2]$. Zostrojte jej obraz v osovej afinitě!

9. Osová afinita je určená osou $o: y = -1$, $M[-4, 2]$, $M'[-4, -3]$. Je daná kružnica $k = (S, r = 3)$, $S[2, -2]$. Zostrojte jej obraz v osovej afinitě!

10. Osová afinita je daná osou o , bodmi M , M' . Zostrojte obraz elipsy na obrázku v osovej afinitě.



*11. Osová afinita je daná osou o a smerom s . Je daný štvorec $ABCD$. Dourčte osovú afinitu tak, aby obrazom štvorca bol obdĺžnik!

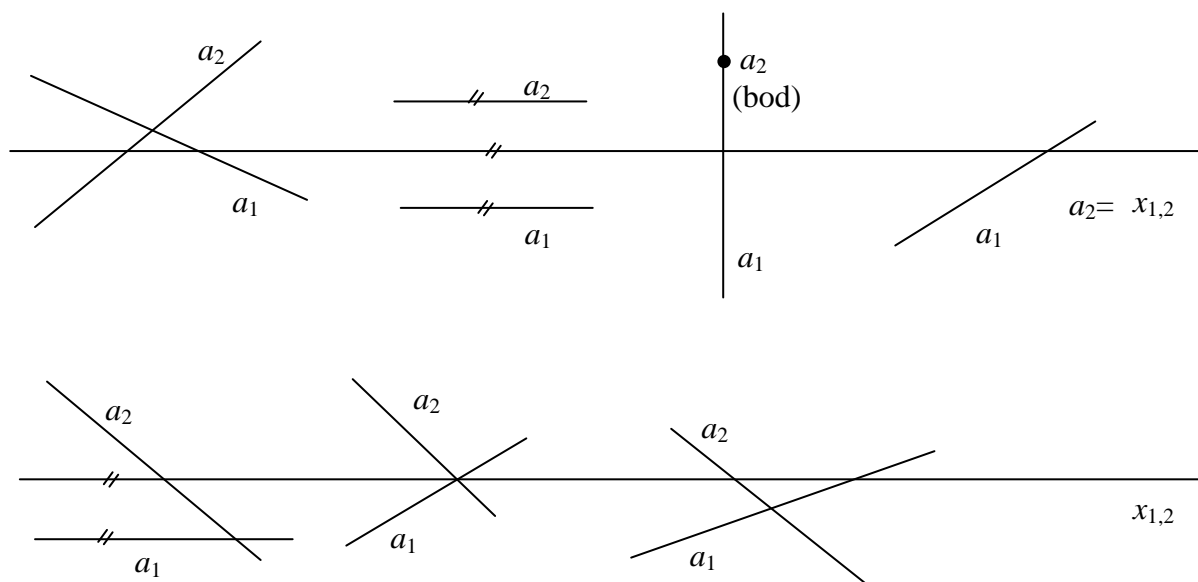
*12. Osová afinita je daná osou o . Je daný štvorec $ABCD$. Dourčte osovú afinitu tak, aby obrazom štvorca bol opäť štvorec! (nie osová súmernosť)

Osová kolíneácia

- Osová kolíneácia je daná $o: 4x - 9y - 36 = 0$, $M[8,1]$, $V[2,10]$, $M' \in MV$, $|MM'| = 3$. Je daný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$: $A[-2,5;-1]$, $S[0,0]$. Zostrojte jeho obraz v osovej kolíneácii.
- Osová kolíneácia je daná $o: 3x + 7y + 42 = 0$, $M[-4,1]$, $V[0,8]$, $M' \in MV$, $|MM'| = 4$. Je daný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$: $A[3,0]$, $S[0,0]$. Zostrojte jeho obraz v osovej kolíneácii.

Mongeovo premietanie

- Zostrojte obrazy bodov $A[2,3,2]$, $B[4,-2,3]$, $C[-1,0,-2]$, $D[0,-1,-3]$, $E[-2,3,-1]$.
- Bodom $B[2,3,1]$ zostrojte priamku b kolmú na nárýsňu, priamku c rovnobežnú s osou x .
- Zostrojte stopníky priamky AB , $A[5,4,1]$, $B[2,5; 1,5; 3,5]$.
- Zostrojte stopníky priamok:



- Znázornite stopami rovinu ρ danú rovnicou:

a) $2x + 3y + 6z - 12 = 0$, b) $x + 2y - z - 4 = 0$, c) $x + z - 3 = 0$, d) $y - 4 = 0$,
 e) $2y + z - 4 = 0$, f) $3x + y - 6 = 0$.

- Zostrojte prvý a druhý priemet rovnostranného trojuholníka ABC , ktorý leží v pôdorysni. $A[2,1,0]$, $B[-2,3,0]$, $y^C > y^B$.

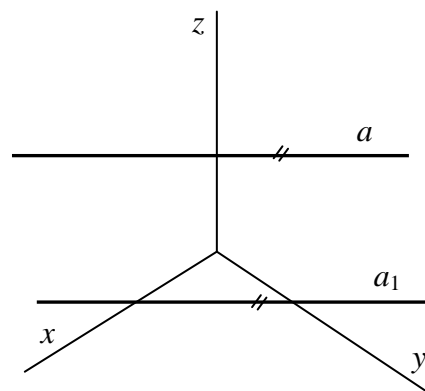
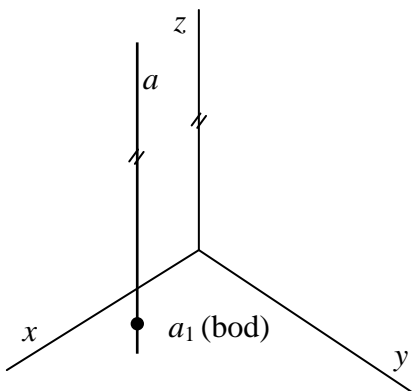
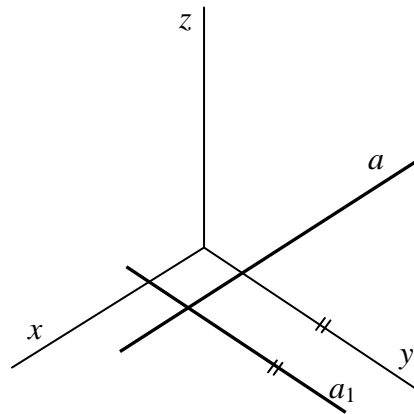
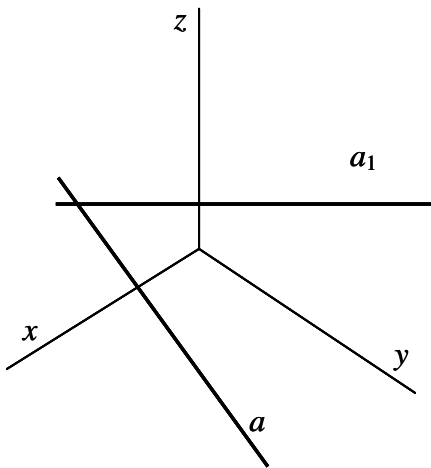
- Zostrojte prvý a druhý priemet rovnoramenného pravouhlého trojuholníka ABC , ktorý leží v pôdorysni. $A[2,1,0]$, $B[-2,3,0]$, $y^C > y^B$.

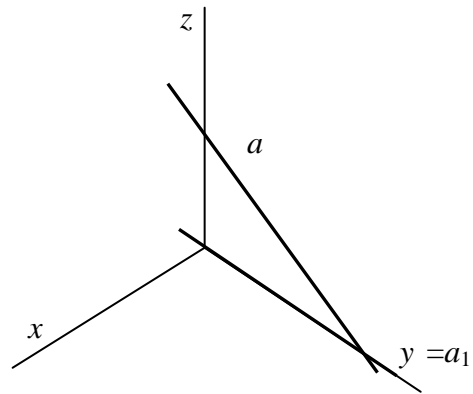
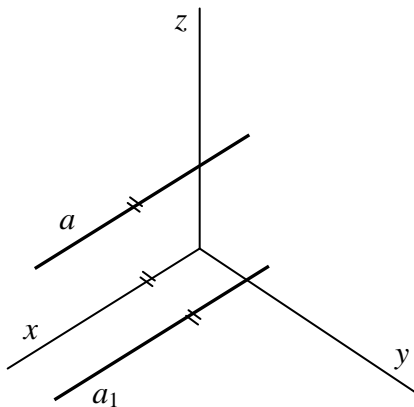
- Zostrojte prvý a druhý priemet štvorca $ABCD$, ktorý leží v nárýsni. $A[0,0,1]$, $B[-3,0,3]$, $z^C > z^B$.

9. Zostrojte prvý a druhý priemet rotačného valca (t.j. výška je kolmá na rovinu podstavy) so spodnou podstavou v pôdorysni $S[3,3,0]$, $r = 2,5$, $v = 5$.
10. Zostrojte prvý a druhý priemet kruhového valca so spodnou podstavou v náryсни $S[2,0,3]$, $S'[-4,4,5]$, $r = 2$.
11. Zostrojte prvý a druhý priemet kvádra $ABCDEFGH$ s obdĺžnikovou podstavou $ABCD$ v pôdorysni. $A[6,1,0]$, $B[1,1,0]$, $C[1;3,5;0]$, $v = 5$.
12. Zostrojte prvý a druhý priemet kvádra $ABCDEFGH$ so štvorcovou podstavou $ABCD$ v pôdorysni. $A[3,1,0]$, $B[0,2,0]$, $y^C > y^B$, $v = 2$.
13. Zostrojte prvý a druhý priemet kocky $ABCDEFGH$ s podstavou $ABCD$ v pôdorysni. $A[4,1,0]$, $B[1,5;2;0]$, $y^C > y^B$.
14. Zostrojte prvý a druhý priemet kocky $ABCDEFGH$ s podstavou $ABCD$ v pôdorysni. $A[3,3,0]$, $D[1,1,0]$, $y^B > y^A$.
15. Zostrojte prvý a druhý priemet kocky $ABCDEFGH$ s podstavou $ABCD$ v pôdorysni. $A[3,3,0]$, $B[0,1,0]$, $y^C > y^B$.
16. Zostrojte prvý a druhý priemet kocky $ABCDEFGH$ s podstavou $ABCD$ v náryсни. $A[-2,0,1]$, $B[1,0,2]$, $z^C > z^B$.
17. Zostrojte prvý a druhý priemet kocky $ABCDEFGH$ s podstavou $ABCD$ v náryсни. $A[1,0,1]$, $B[-3,0,4]$, $z^C > z^B$.
18. Zostrojte prvý a druhý priemet pravidelného kolmého štvorbokého ihlana $ABCDV$ s podstavou $ABCD$ v náryсни. $A[4,0,2]$, $B[2,0,1]$, $z^C > z^B$, $v = 2$.
19. Zostrojte prvý a druhý priemet šikmého ihlana $ABCDV$ s obdĺžnikovou podstavou $ABCD$ v pôdorysni. $A[0,0,0]$, $B[3,0,0]$, $C[3,2,0]$, $V[2,1,5]$.
20. Zostrojte prvý a druhý priemet pravidelného kolmého trojbokého ihlana $ABCV$ s podstavou ABC v náryсни. $A[0,0,0]$, $B[3,0,1]$, $z^C > z^B$, $v = 4$.
21. Zostrojte prvý a druhý priemet rotačného kužeľa s podstavou v pôdorysni $S[2,4,0]$, $r = 2$, $v = 5$.
22. Zostrojte prvý a druhý priemet kruhového kužeľa s podstavou v náryсни $S[0,0,4]$, $r = 2$, $V[-4,4,3]$.
23. Zostrojte prvý a druhý priemet gule so stredom $S[0,3,3]$, $r = 2$.

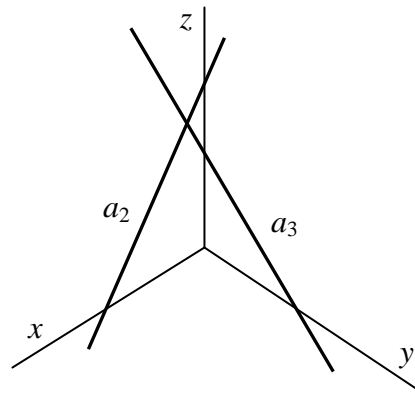
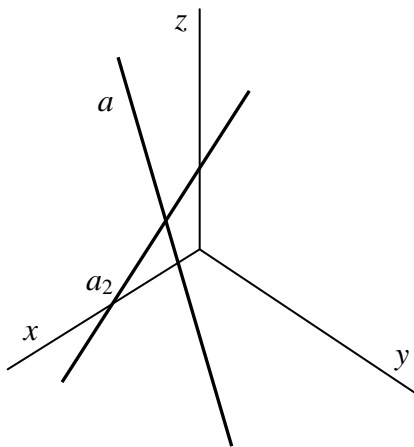
Axonometria

1. KA(10, 11, 12). Zostrojte obrazy bodov $A[1,4,4]$, $B[-1,-3,0]$, $C[3,0,1]$, $D[2, 9, 11]$.
2. KA(10, 11, 12). Zostrojte obrazy bodov $A[4,1,2]$, $B[10,0,-1]$, $C[-3,3,10]$, $D[0,0,-1]$.
3. Nech sú dané body $A[4,1,-1]$, $B[1,5,4]$. Zostrojte stopníky priamky a) graficky v izometrii, b) numericky.
4. Nech sú dané body $A[4,-1,4]$, $B[1,3,-2]$. Zostrojte stopníky priamky a) graficky v izometrii, b) numericky.
5. Nech je daná priamka $a: x = 3 - 2t, y = -1 + 3t, z = -2 + 3t$. Zostrojte stopníky priamky a) graficky v izometrii, b) numericky.
6. Nech je daná priamka $a: x = 2, y = 1 + 3t, z = 2 + 4t$. Zostrojte stopníky priamky a) graficky v izometrii, b) numericky.
7. Nech je daná priamka $a: x = 1 - 2t, y = 1 + t, z = 2 + t$. Zostrojte stopníky priamky a) graficky v izometrii, b) numericky.
8. Zostrojte stopníky priamok na obrázku:





***8.**



9. V izometrii zostrojte stopy roviny ρ danej rovnicou:

- a) $3x + y + z - 3 = 0$, b) $2x - 3y + 2z + 6 = 0$, c) $4x + 3y - 4z - 12 = 0$, d) $x + 2y - 4 = 0$,
 e) $2x + 3z - 6 = 0$, f) $2y - 6z - 6 = 0$, g) $z - 3 = 0$, h) $x - 1 = 0$.

***10.** V izometrii zostrojte stopy roviny $\rho : 3x + 2y - z = 0$.

***11.** Zistite polohu priamok numericky a graficky v izometrii:

$$a = AB, A[0, 4, 0], B[4, 0, 6] \quad c = CD, C[0, 2, 4], D[2, 0, 1]$$

***12.** Zistite polohu priamok numericky a graficky v izometrii. Ak sa dá, zostrojte stopy roviny určenej priamkami a, b :

$$\begin{aligned} a: x &= 4 + t & b: x &= 4 - s \\ y &= 1 - t & y &= 5 + s \\ z &= 3 + 2t & z &= -2 - 2s \end{aligned}$$

***13.** Zistite polohu priamok numericky a graficky v izometrii. Ak sa dá, zostrojte stopy roviny určenej priamkami a, b :

$$\begin{aligned} a: x &= 4 + t & b: x &= 5 - s \\ y &= 1 - t & y &= 2s \\ z &= 3 + 2t & z &= 5 - 6s \end{aligned}$$

***14.** Zistite polohu priamok numericky a graficky v izometrii. Ak sa dá, zostrojte stopy roviny určenej priamkami a, b :

$$a: x = 3 + 2t \quad b: x = 1 - 4s$$

$$y = 1 - t \quad y = 1 + 2s$$

$$z = t \quad z = -2s$$

***15.** Zistite polohu priamok numericky a graficky v izometrii. Ak sa dá, zostrojte stopy roviny určenej priamkami a, b :

$$a: x = 2 - t \quad b: x = 1 + 2s$$

$$y = 3t \quad y = 1$$

$$z = 1 + 3t \quad z = 3 - 3s$$

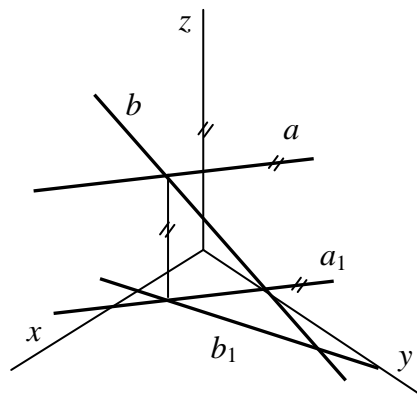
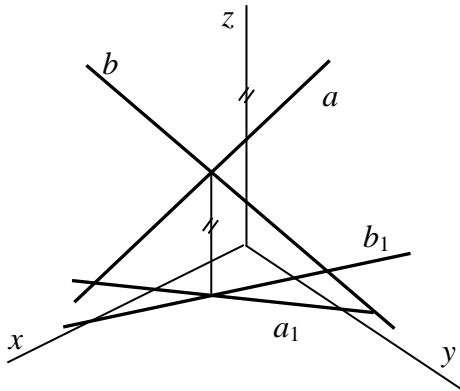
***16.** Zistite polohu priamok numericky a graficky v izometrii. Ak sa dá, zostrojte stopy roviny určenej priamkami a, b :

$$a: x = 1 \quad b: x = 2 + 3s$$

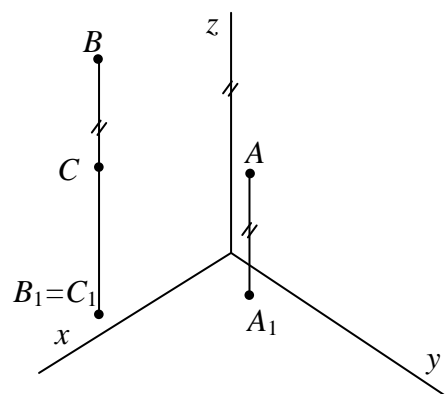
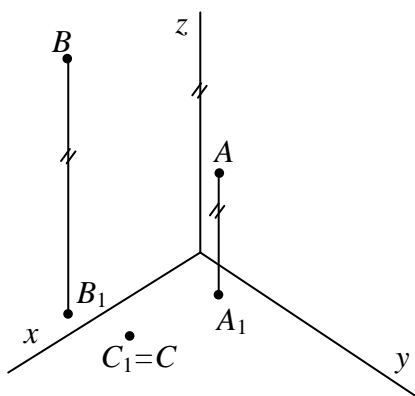
$$y = 0 \quad y = 4s$$

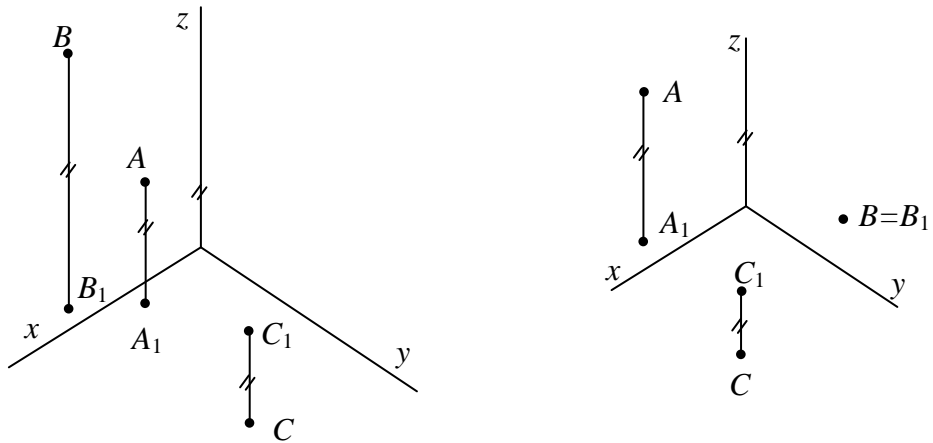
$$z = 3 + t \quad z = 2 + 3s$$

17. Zostrojte stopy roviny určenej dvomi rôznobežnými priamkami na obrázku:

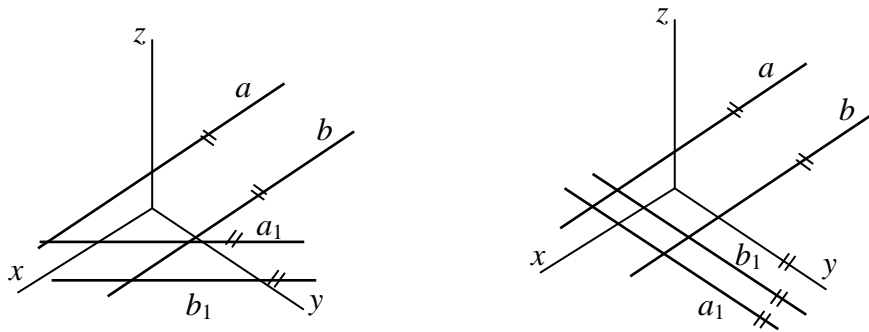


18. Zostrojte stopy roviny určenej tromi nekolineárnymi bodmi na obrázku:

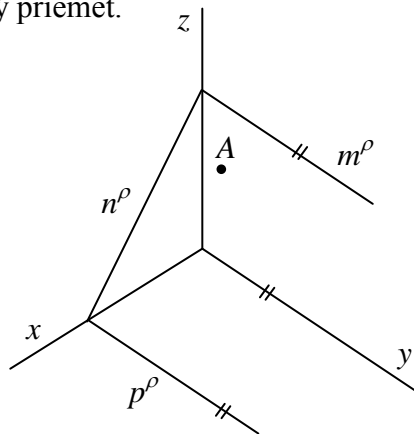




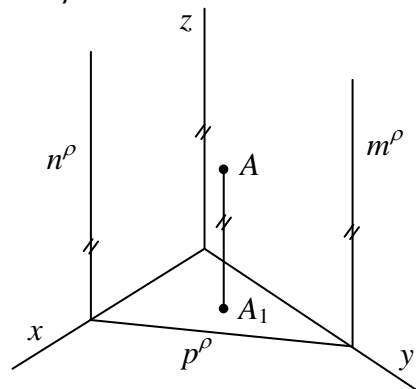
19. Zostrojte stopy roviny určenej dvomi rovnobežnými priamkami na obrázku:



*20. Dourčte chýbajúci prvý axonometrický priemet bodu, ktorý leží v rovine a poznáme preň len axonometrický priemet.



*21. Leží bod A v rovine ρ ?



*22. Zistite polohu rovín $\alpha: 2x - y + 2z - 4 = 0$, $\beta: 4x - 2y + 4z - 12 = 0$.

23. Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha: 4x - 3y + 6z - 12 = 0$, $\beta: 3x + 2y - 6 = 0$ a) graficky v izometrii b) numericky.

24. Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha: 5x + 5y - 2z - 10 = 0$, $\beta: 3x + z - 3 = 0$ a) graficky v izometrii b) numericky.

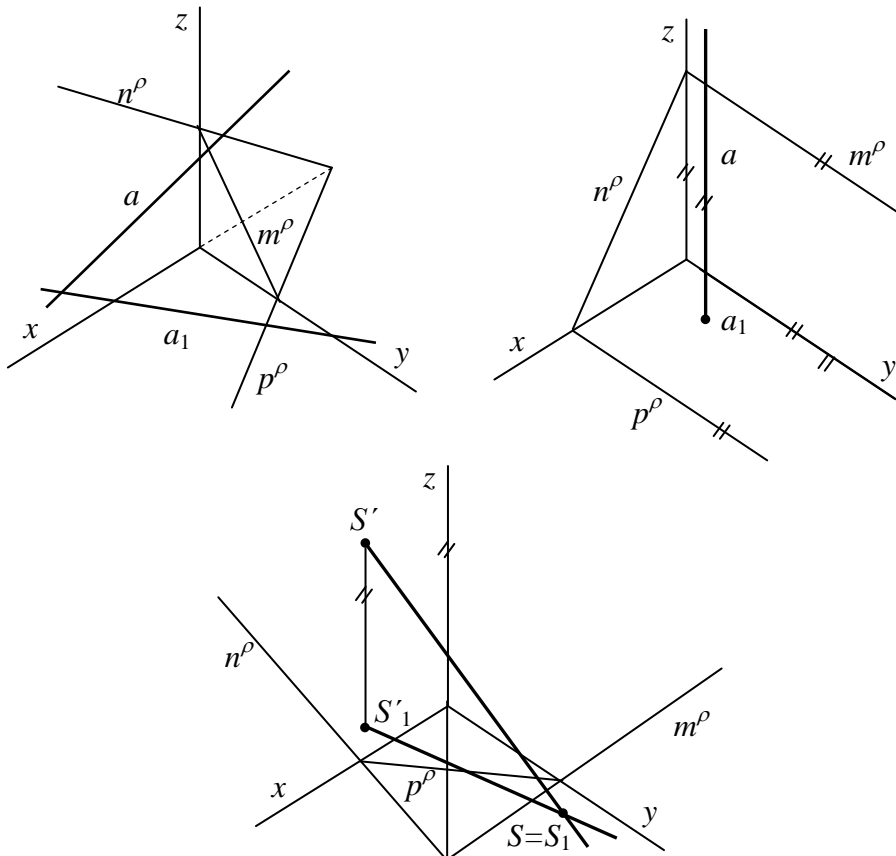
25. Zostrojte priesečník priamky $a = AB$, $A[4,2,2]$, $B[2,4,2]$ s rovinou $\rho: 4x - 3y + 4z - 12 = 0$ a) graficky v izometrii b) numericky.

26. Zostrojte priesečník priamky $a = SS'$, $S[-2,6,0]$, $S'[3,2,6]$ s rovinou $\rho: 4x + 5z - 20 = 0$ a) graficky v izometrii b) numericky.

27. Zostrojte priesečník priamky $a: x = 2 + 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = 6t$ s rovinou $\rho: 5x + 3z - 15 = 0$ a) graficky v izometrii b) numericky.

28. Zostrojte priesečník priamky $a: x = 4 - 4t$, $y = 2$, $z = 2$ s rovinou $\rho: 4x + 3y - 2z - 12 = 0$ a) graficky v izometrii b) numericky.

29. Zostrojte priesečník priamky s rovinou na obrázku:

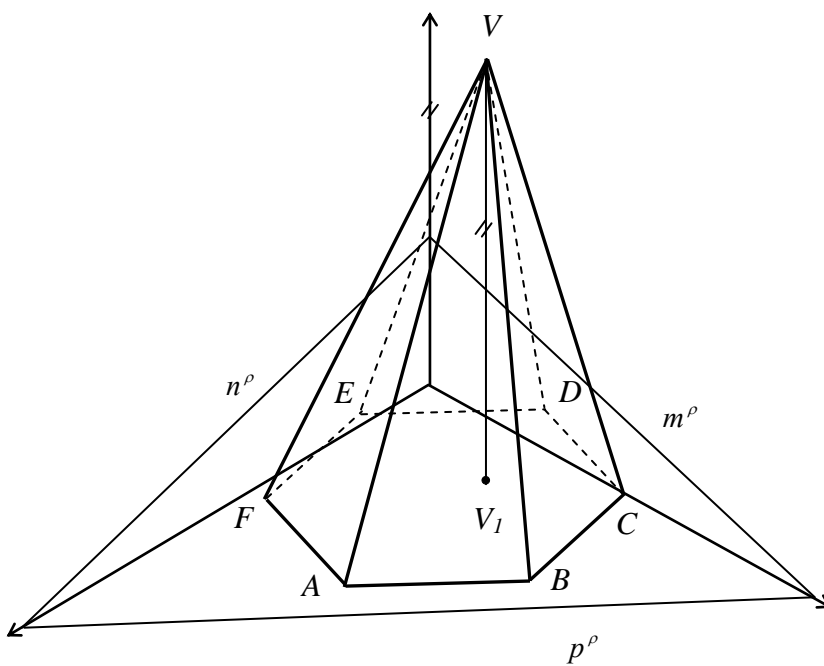
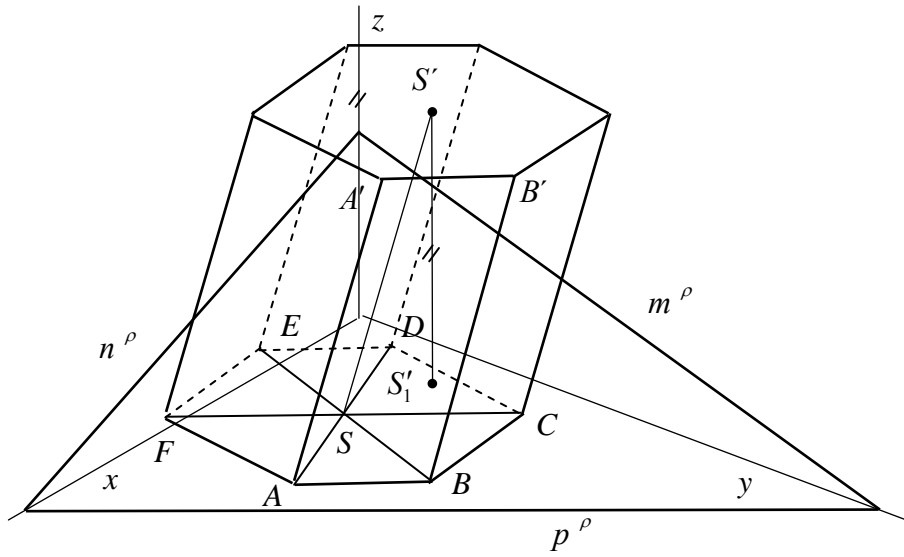
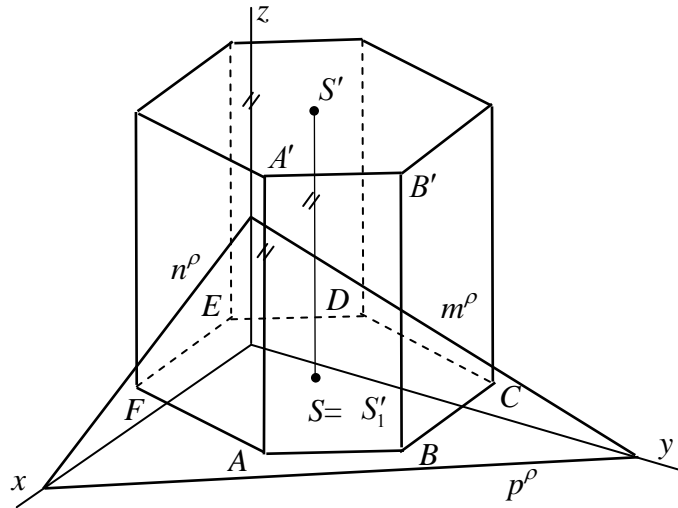


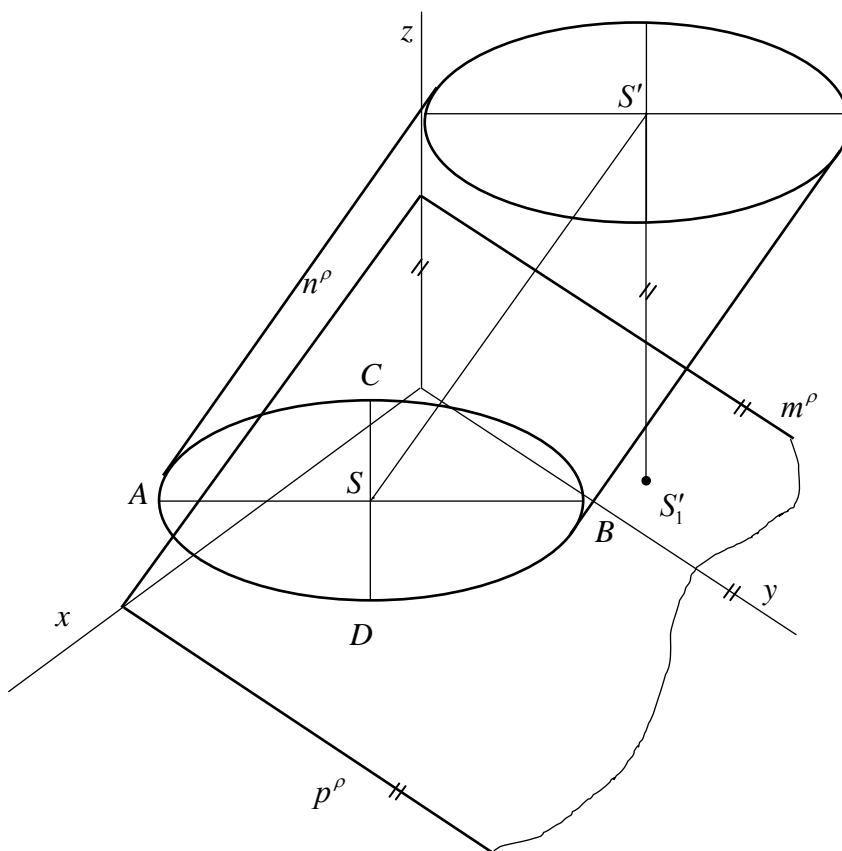
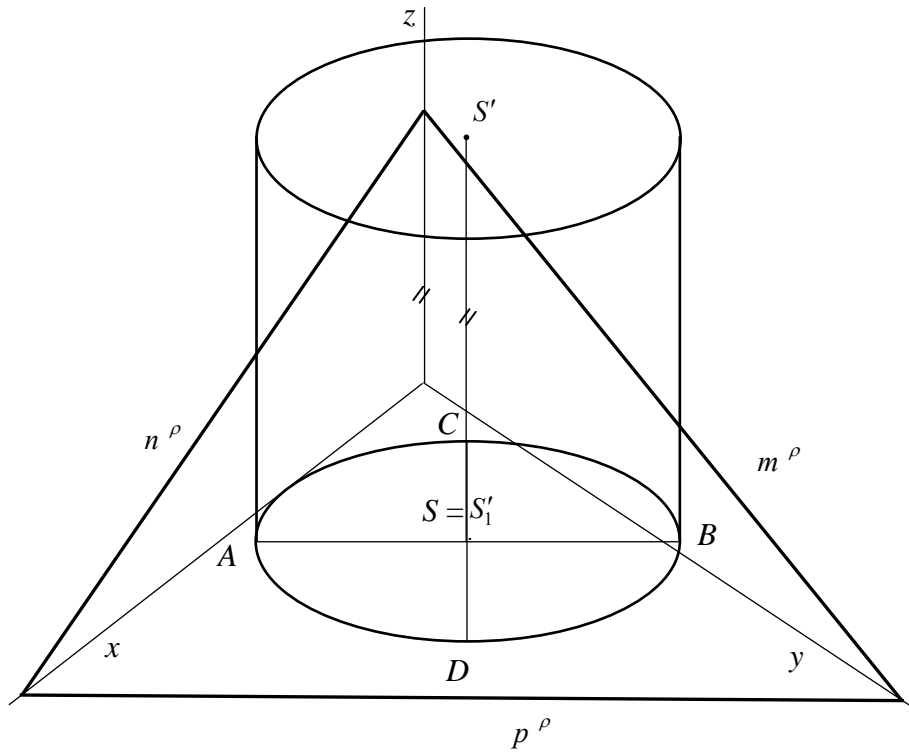
*30. Zostrojte priesečník trojuholníkov ABC , EFG , $A[8,0,7]$, $B[-3,2,0]$, $C[2,-3,9]$
 $E[7,-2,8]$, $F[3,3,4]$, $G[-3,0,5]$.

Rez telesa, prienik priamky a telesa

1. KA(10,12,11). Zostrojte rez šikmého hranola so spodnou podstavou pravidelný šesťuholník v pôdorysni, $S[1,1,0]$, $A[3,3,0]$, bod hornej podstavy $A'[7;0; 9,5]$, rovinou $\rho(12,10,7)$.
2. KA(10,11,12). Zostrojte rez šikmého hranola so spodnou podstavou pravidelný šesťuholník v pôdorysni, $S[1,5,0]$, $A[2,2,0]$, stred hornej podstavy $S'[6,0,7]$, rovinou $\rho(11,12,6)$.
3. KA(11,10,10). Zostrojte rez kolmého hranola s podstavou pravidelný šesťuholník v pôdorysni, $S[5,5,0]$, $A[5,1,0]$, $v=12$, rovinou $\rho(\infty,10,5)$.
4. KA(10,12,11). Zostrojte rez šikmého ihlana , ktorý má podstavu pravidelný šesťuholník v pôdorysni $S[5,-4,0]$, $A[5,0,0]$, $V[8;4;10,5]$, rovinou $\rho(\infty,5,6)$. Pravý dolný vrchol axonometrického trojuholníka asi 3 cm od pravého bočného okraja.
5. KA(10,12,11). Zostrojte rez šikmého ihlana , ktorý má podstavu pravidelný šesťuholník v pôdorysni $S[2,-1,0]$, $A[1,2,0]$, $V[5,0,10]$, rovinou $\rho(8,\infty, 7)$. Pravý dolný vrchol axonometrického trojuholníka asi 3 cm od pravého bočného okraja.
6. KA(10,12,11). Zostrojte rez kolmého ihlana , ktorý má podstavu pravidelný šesťuholník v pôdorysni $S[5,0,0]$, $A[1,1,0]$, $v=10$, rovinou $\rho(10,6,13)$.
7. KA(10,12,11). Zostrojte rez rotačného valca s podstavou v pôdorysni, $S[4,4,0]$, $r=3.5$, $v=9$, rovinou $\rho(\infty,9,8)$.
8. KA(10,11,12). Zostrojte rez kruhového valca s podstavou v pôdorysni, $S[-5,4,0]$, $S'[0,5,7.5]$, $r=3$ rovinou $\rho(7.5,7,5)$. Ľavý spodný vrchol axonometrického trojuholníka umiestnite asi 3cm od bočného okraja.
9. KA(10,12,11). Zostrojte rez kruhového valca s podstavou v pôdorysni, $S[1,1,0]$, $S'[-1,4,8]$, $r=3$ rovinou $\rho(10,12,5)$.
10. KA(10,12,11). Zostrojte prienik priamky QR so šikmým kužeľom s podstavou v pôdorysni. $S[3,5,0]$, $A[3,5,;1;0]$, vrchol $V[2,5,8]$, $Q[-1.5,9,0]$, $R[8,5,5]$.
11. KA(10,11,12). Zostrojte prienik priamky KL so šikmým valcom s podstavou v pôdorysni. $S[6,7,0]$, bod podstavy $A[7,4,0]$, stred hornej odstavy $S'[4,0,7]$, $L[8,-3,1]$, $K[2,5,7]$.

12. Zostrojte rezy telies na obrázkoch:





Krivky v rovine

1. Nájdite parametrické vyjadrenie krivky $y^3 - x^2(2a - y) = 0$, $a = \text{konšt.}$
2. Nájdite parametrické vyjadrenie kružnice $x^2 + y^2 = 2ax$, $a = \text{konšt.}$ Načrtnite ju.
3. Nájdite parametrické vyjadrenie krivky $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $a = \text{konšt.}$
4. Nájdite implicitnú rovnicu $x = 3 + 5 \cos t$, $y = 4 \sin t$. krivky
5. Nájdite implicitnú rovnicu $x = \frac{a}{\sin t}$, $y = b \cot t$, $a, b = \text{konšt.}$ krivky konšt.
6. Nájdite implicitnú rovnicu krivky $x = \frac{2at^2}{4a^2 + t^2}$, $y = \frac{2at^3}{4a^2 + t^2}$, $a = \text{konšt.}$
7. Nájdite implicitnú rovnicu krivky $x = 2atg t$, $y = 2a \cos^2 t$, $a = \text{konšt.}$
8. Nájdite implicitnú rovnicu krivky $x = t^2 + t + 3$, $y = t^2 - t + 1$.